Universität Karlsruhe
Institut für Stochastik

Prof. Dr. G. Last
Dipl.-Math. D. Gentner

Stochastische Geometrie (SS 09)

Übungsblatt 12

Aufgabe 1

(a) Wie simuliert man die typische Zelle eines Poisson-Voronoi-Mosaiks?
Hinweis: Satz von Slyvniak

(b) Allgemein sei nun X ein stationäres Mosaik im $\mathbb{R}^d$ mit Intensität $\gamma^{(d)} = 1$, $Z_0^{(d)}$ die 0-Zelle, und $Z^{(d)}$ die typische Zelle. Es ist einfach, $Z_0^{(d)}$ am PC zu simulieren. Doch wie simuliert man $Z^{(d)}$? Sei dazu $c : \mathcal{C}^d \to \mathbb{R}^d$ eine kovariante Zentrumsfunktion und $\xi := \sum_{F \in X} \delta_{c(F)}$ der Punktprozess der Zentren. Sie dürfen verwenden, dass es zu jedem stationären Punktprozess ξ stets eine kovariante *faire Allokation* des Lebesguemaßes λ^d auf X gibt, d.h. eine Abbildung $\tau : N(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ so, dass

$$\begin{aligned} \tau(\mu, x) &\in \mu, \quad x \in \mathbb{R}^d, \mathbb{P}^\xi\text{-f.a.}\mu \\ \lambda^d(\tau_\mu^{-1}(x)) &= 1, \quad x \in \mu, \mathbb{P}^\xi\text{-f.a.}\mu \\ \tau(T_y\mu, T_y x) &= T_y\tau(\mu, x), \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \mu \in N(\mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

(Idee genügt, ein exakter Nachweis ist recht schwer.)

Aufgabe 2

Sei X ein stationäres zufälliges Mosaik in $\mathbb{R}^d$ mit typischer Zelle Z und Nullzelle Z_0. Sei weiter F die Verteilungsfunktion von $V_d(Z)$ und F_0 die Verteilungsfunktion von $V_d(Z_0)$. Zeigen Sie, dass Z stochastisch von Z_0 dominiert wird, d.h. dass

$$F_0(x) \leq F(x), \quad x \geq 0.$$

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie für nicht-negative Zufallsvariablen X mit Verteilungsfunktion F die Momentenformel

$$\mathbb{E}X^k = k \int x^{k-1}(1 - F(x))dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

(b) Folgern Sie nun aus Aufgabe 2, dass für die k-ten Momente der Volumina von typischer Zelle Z und 0-Zelle Z_0 gilt, dass

$$\mathbb{E}V_d(Z_0)^k \geq \mathbb{E}V_d(Z)^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$