Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik
Prof. Dr. Daniel Hug

Name:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Klausur zum Fach

WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE UND STATISTIK (STOCHASTIK)

für **Studierende des Maschinenbaus**

Datum: 08. Februar 2012

Dauer: 180 Minuten

Diese Klausur hat bestanden, wer mindestens 30 Punkte von 75 möglichen Punkten erreicht.

Aufgabe 1 [12 P]					Aufgabe 2 [12 P]					Aufgabe 3 [12 P]					Aufgabe 4 [10 P]				
a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e

Aufgabe 5 [10 P]					Aufgabe 6 [10 P]					Aufgabe 7 [9 P]			$\sum$
a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Gegeben sei eine Urliste mit den Paaren $(x_1, y_1), \ldots, (x_8, y_8)$

j	1	2	3	4	5	6	7	8
x_j	1.5	1.7	2.7	2.7	3.1	3.2	3.2	3.4
y_j	2.6	2.9	3.4	3.7	3.9	4.2	4.5	4.6

a) Berechnen Sie die Stichprobenmittel $\bar{x}$, $\bar{y}$, die Stichproben-Standardabweichungen s_x, s_y und den empirischen Korrelationskoeffizienten r_{xy}.

Hinweis:

$$\sum_{j=1}^{8} x_j = 21.5, \ \sum_{j=1}^{8} x_j^2 = 61.37, \ \sum_{j=1}^{8} y_j = 29.8, \ \sum_{j=1}^{8} y_j^2 = 114.68, \ \sum_{j=1}^{8} x_j \cdot y_j = 83.57.$$

b) Bestimmen Sie die zugehörige Regressionsgerade $y = a^* + b^* \cdot x$ von y auf x.

c) Berechnen Sie das 0.2-getrimmte Stichprobenmittel $\bar{y}_{0.2}$ von $(y_1, \ldots, y_8)$.

d) Bestimmen Sie das Stichproben-0.3-Quantil $\tilde{y}_{0.3}$ von $(y_1, \ldots, y_8)$.

e) Berechnen Sie den Quartilsabstand von $(y_1, \ldots, y_8)$.

Lösung:

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Es seien X eine Zufallsvariable mit Werten in $\{-1, 1, 2\}$ und

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{3}, \qquad \mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{6}$$

sowie Y eine Zufallsvariable mit Werten in $\{0, 1\}$ und den bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(Y = 0 \mid X = -1) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(Y = 0 \mid X = 1) = \frac{1}{4}, \qquad \mathbb{P}(Y = 1 \mid X = 2) = \frac{3}{4}.$$

a) Begründen Sie, dass $\mathbb{P}(Y = 0 \mid X = -1) + \mathbb{P}(Y = 1 \mid X = -1) = 1$ gilt.
Berechnen Sie $\mathbb{P}(Y = 1 \mid X = -1)$, $\mathbb{P}(Y = 1 \mid X = 1)$ und $\mathbb{P}(Y = 0 \mid X = 2)$.

b) Berechnen Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y sowie die Verteilung von Y, d.h. $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ und $\mathbb{P}(Y = y)$ für alle $x \in \{-1, 1, 2\}$ und $y \in \{0, 1\}$.

c) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(X + Y)$.

d) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X \cdot Y)$ und die Varianz $V(X)$ von X.

e) Sind X und Y stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

Aufgabe 3 (12 Punkte)

An einer E-Mail-Adresse kommen erwünschte E-Mails und Spam-Mails an. Jede ankommende E-Mail sei unabhängig von den vorangehenden mit der Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ **erwünscht**. Sei S_n die zufällige Anzahl von **nicht erwünschten** Spam-Mails bei n eingegangenen E-Mails.

a) Welche Verteilung hat die Zufallsvariable S_n?

Berechnen Sie $\mathbb{P}(S_n \geq 2)$ für $p = 0.7$ und $n = 10$.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(S_n)$ und die Varianz $V(S_n)$ für $p = 0.7$ und $n = 10$.

c) Schätzen Sie für $p = 0.7 = 1 - q$, $n = 500$ und $\varepsilon = 0.05$ die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n} \cdot S_n - q\right| \geq \varepsilon\right)$$

nach oben mit Hilfe der Tschebyschev-Ungleichung ab.

d) Sei nun $p \in (0,1)$ wieder beliebig. Ferner bezeichne T_k die zufällige Anzahl an Spam-Mails bis zur k-ten erwünschten E-Mail, $k = 1, 2$.

Welche Verteilungen haben die Zufallsvariablen T_1 beziehungsweise T_2?

Geben Sie $\mathbb{E}(T_1)$ und $\mathbb{E}(T_2)$ an.

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(T_1 \geq 2)$ für allgemeines p sowie für $p = 0.7$.

Lösung:

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Zwei Geräte G_1 und G_2 haben die zufälligen Lebensdauern X bzw. Y mit der gemeinsamen Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \alpha x e^{-x-\alpha y}, & x, y > 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\alpha > 0$ eine gegebene Konstante ist.

Hinweis: Eine Stammfunktion zu $x \mapsto xe^{-cx}$ für $c \neq 0$ ist $x \mapsto -\frac{1}{c}\left(x + \frac{1}{c}\right)e^{-cx}$.

a) Geben Sie die Dichte g von X und die Dichte h von Y an.

Welche Verteilungen haben X beziehungsweise Y.

Warum sind X und Y stochastisch unabhängig?

Sind auch $\sin(X)$ und $\sin(Y)$ stochastisch unabhängig?

b) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X \geq 1, Y < 1)$.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X < Y)$, dass G_1 vor G_2 ausfällt.

d) Sei Z eine $\operatorname{Exp}(\gamma)$-verteilte Zufallsvariable mit $\gamma > 0$. Berechnen Sie $\mathbb{E}(Z^2)$.

e) Sei F die Verteilungsfunktion und f die Dichte der $\operatorname{Exp}(\gamma)$-verteilten Zufallsvariable Z. Berechnen Sie für $t > 0$ die sogenannte Ausfallrate

$$\frac{f(t)}{1 - F(t)}.$$

Lösung:

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Die Zufallsvariable X besitze die Verteilung $\mathcal{N}(2,1)$. Weiter sei $Y := 1 - 2X$.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(Y)$ und die Varianz $V(Y)$.

b) Welche Verteilung hat Y?

c) Drücken Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(-1 \leq Y \leq 3)$ mit Hilfe der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ aus.

d) Bestimmen Sie die Kovarianz $C(X,Y)$ und den Korrelationskoeffizienten $\rho(X,Y)$.

e) Sei U eine auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable, das heißt $U \sim \mathcal{U}(0,1)$. Welche Verteilung hat die Zufallsvariable $2 \cdot \Phi^{-1}(U) + 1$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Es soll der unbekannte Parameter $\vartheta > 0$ für die Verteilung mit der Dichte

$$f_\vartheta(t) = \begin{cases} \dfrac{4t^3}{\vartheta} \cdot \exp\left(-\dfrac{1}{\vartheta} \cdot t^4\right), & t > 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

bestimmt werden.

a) Geben Sie die zur Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n)$ gehörende Likelihood-Funktion $L_x(\vartheta)$ und die Loglikelihood-Funktion $M_x(\vartheta)$ an.

b) Berechnen Sie die Ableitung $M_x'(\vartheta)$.

c) Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta}(x)$ für ϑ zur Stichprobe x.

d) Bestimmen Sie zunächst die Verteilungsfunktion von X_1, wenn X_1 die Dichte f_ϑ hat. Zeigen Sie dann, dass X_1^4 einer $\mathrm{Exp}(\frac{1}{\vartheta})$-Verteilung folgt.

e) Ist $\hat{\vartheta}$ ein erwartungstreuer Schätzer für ϑ?

Lösung:

Aufgabe 7 (9 Punkte)

Bei n Messungen der Laufzeit eines Algorithmus ergeben sich die zufälligen Werte $X_1, \ldots, X_n$. Es wird angenommen, dass die Stichprobenvariablen $X_1, \ldots, X_n$ stochastisch unabhängig mit Verteilung $\mathcal{N}(\vartheta, \sigma_0^2)$ sind mit unbekanntem Mittelwert ϑ und bekannter Varianz $\sigma_0^2 > 0$.

a) Welche Verteilung besitzt das Stichprobenmittel $\bar{X} := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$?

b) Aufgrund einer Stichprobe $x = (x_1, \ldots, x_n)$ vom Umfang n berechne man für $\gamma(\vartheta) := \vartheta$ ein Konfidenzintervall der Form

$$\mathcal{C}(x) := \left[\bar{x} - \frac{c \cdot \sigma_0}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{c \cdot \sigma_0}{\sqrt{n}}\right]$$

zum effektiven Konfidenzniveau $1 - \alpha$, $0 < \alpha < 1$, durch geeignete Bestimmung der Konstanten $c > 0$.

c) Bestimmen Sie $\mathcal{C}(x)$ unter der Voraussetzung $\sigma_0^2 = 100$ im Fall der Stichprobe

$$x = (614, 597, 608, 620, 609, 620, 609, 605, 612)$$

für $\alpha = \alpha_1 := 0.05$ und für $\alpha = \alpha_2 := 0.01$.

Hinweis: $\Phi(1.65) = 0.950$, $\Phi(1.9600) = 0.975$, $\Phi(2.33) = 0.990$, $\Phi(2.4325) = 0.9925$, $\Phi(2.5759) = 0.995$, $\Phi(3.095) = 0.9990$, $\Phi(3.175) = 0.99925$

Lösung: