Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| < \infty$. Beweisen Sie, dass dann

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie für die erzeugende Funktion $G_X(s) = \mathbb{E}[s^X]$, $s \in [0, 1]$, einer nicht-negativen ganzzahligen Zufallsvariablen X die folgenden Aussagen:

- $G_X(0) = \mathbb{P}(X = 0)$ und $G_X(1) = 1$
- G_X is monoton wachsend und unendlich oft stetig differenzierbar mit $\lim\limits_{s \to 1-} G'_X(s) = \mathbb{E}X$.
- G_X ist konvex und sogar streng konvex, falls $\mathbb{P}(X \leqslant 1) < 1$.

Aufgabe 3

Gegeben sei ein Verzweigungsprozess mit Nachkommenverteilung $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und Aussterbewahrscheinlichkeit $\eta > 0$. Überprüfen Sie, dass dann $(p'_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit

$$p'_n = \eta^{n-1} p_n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

ebenfalls eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist.

Aufgabe 4

Es sei $\lambda > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant \lambda$. Beweisen Sie, dass es einen Wahrscheinlichkeitsraum mit zwei Zufallsvariablen $X \sim \text{binomial}(n, \lambda/n)$ und $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$ gibt, so dass

$$\mathbb{P}(X \neq Y) \leqslant \frac{\lambda^2}{n}.$$