Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1

Es sei T die gesamte Nachkommenanzahl eines Verzweigungsprozesses $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Nachkommenverteilung X. Zeigen Sie, dass die erzeugenden Funktionen G_T und G_X von T und X die Gleichung

$$G_T(s) = sG_X(G_T(s))$$

für $s \in [0, 1)$ erfüllen.

Hinweis: Für einen Verzweigungsprozess mit Aussterbewahrscheinlichkeit $\eta < 1$ hat das Ereignis $T = \infty$ positive Wahrscheinlichkeit. In diesem Fall ist $G_T : [0, 1) \to [0, 1)$ definiert als

$$G_T(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(T = k) = \mathbb{E}[\mathbf{1}\{T < \infty\}s^T].$$

Aufgabe 2

Es seien $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(Y = 1) = p$ und $\mathbb{P}(Y = -1) = 1 - p$, $p \in [0, 1]$, und es sei

$$U_n = \sum_{i=0}^{n} Y_i, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Bestimmen Sie

$$\mathbb{P}(\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : U_n \neq 0\ \forall\, n \geqslant n_0)$$

in Abhängigkeit von p.

Aufgabe 3

Gegeben seien $n \in \mathbb{N}$, $p, q \in [0, 1]$ und zwei Zufallsvariablen M und N, so dass M binomial(n, p)-verteilt ist und N bedingt auf das Ereignis $M = k$ binomial(k, q)-verteilt ist. Beweisen Sie, dass N dann binomial(n, pq)-verteilt ist.

Aufgabe 4

Zeigen Sie für $Y \sim$ Binomial$(n, m\lambda/n)$ mit $n, m \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in (0, 1)$, so dass $m\lambda/n \leqslant 1$, die Ungleichung

$$\mathbb{P}(Y \geqslant m) \leqslant e^{-I_\lambda m}$$

mit $I_\lambda = \lambda - 1 - \log \lambda$.