Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1

Wir bezeichnen $\mu < 1 < \lambda$ als konjugiert, wenn $\mu e^{-\mu} = \lambda e^{-\lambda}$. Zeigen Sie für konjugierte $\mu < 1 < \lambda$, dass ein Poisson(λ)-Verzweigungsprozess darauf bedingt, dass er ausstirbt, die gleiche Verteilung wie ein Poisson(μ)-Verzweigungsprozess hat und dass $\mu = \eta_\lambda \lambda$, wobei η_λ die Aussterbewahrscheinlichkeit eines Poisson(λ)-Verzweigungsprozesses ist.

Aufgabe 2

Beweisen Sie für $n, k, \ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell < n$ und $p \in (0,1)$ die Ungleichung

$$\left|\mathbb{P}(|C_{n,p}(1)| \leqslant k) - \mathbb{P}(|C_{n-\ell,p}(1)| \leqslant k)\right| \leqslant k\ell p.$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie für $\lambda > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $k \in [n]$, dass

$$\operatorname{Var} \sum_{i \in [n]} \mathbf{1}\{|C_{n,\lambda/n}(i)| \geqslant k\} \leqslant (\lambda k + 1) n k.$$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 2.

Aufgabe 4

a) Für einen gegebenen Graphen $G = (V, E)$ sei $N_G(n,p)$ die Anzahl an Kopien von G in $\mathrm{ER}(n,p)$. Bestimmen Sie den Erwartungswert von $N_G(n,p)$.

b) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $B_{n,p,k}(1)$ der Graph, der aus allen Knoten in $\mathrm{ER}(n,p)$, deren Abstand zum Knoten 1 höchstens k ist, und den dazugehörigen Kanten aus $\mathrm{ER}(n,p)$ besteht. Zeigen Sie für $\lambda > 0$, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_{n,\lambda/n,k}(1) \text{ ist ein Baum}) = 1.$$