Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1

Für $k \in \mathbb{N}$ sei $B_{n,p,k}(1)$ der Graph, der aus allen Knoten in $\mathrm{ER}(n,p)$, deren Abstand zum Knoten 1 höchstens k ist, und den dazugehörigen Kanten aus $\mathrm{ER}(n,p)$ besteht. Zeigen Sie für $\lambda > 0$, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_{n,\lambda/n,k}(1) \text{ ist ein Baum}) = 1.$$

Aufgabe 2

Für $\lambda > 1$ sei T_λ die gesamte Nachkommenanzahl eines Poisson(λ)-Verzweigungsprozesses und $I_\lambda = \lambda - 1 - \log\lambda$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für $k \in \mathbb{N}$ ist
$$\mathbb{P}(k \leqslant T_\lambda < \infty) \leqslant \frac{e^{-I_\lambda k}}{1-e^{-I_\lambda}}.$$

b) Für eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \lambda$ und dazugehörigen Überlebenswahrscheinlichkeiten $(\zeta_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ gilt
$$\zeta_\lambda = \zeta_{\lambda_n} + O(|\lambda - \lambda_n|).$$

Aufgabe 3

Für $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in (0,n)$ sei $X \sim \text{binomial}(n-1,\lambda/n)$ und $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Zeigen Sie, dass dann

$$|\mathbb{P}(X=k) - \mathbb{P}(Y=k)| \leqslant \frac{\lambda+\lambda^2}{n}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 4

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$, $\lambda \in (0,n)$ und $k \in [n]$ sei

$$P_k(n,\lambda/n) = \frac{1}{n}\sum_{i\in[n]} \mathbf{1}\{\deg(i) = k \text{ in } \mathrm{ER}(n,\lambda/n)\}$$

sowie $X_1 \sim \text{binomial}(n-1,\lambda/n)$ und $X_2 \sim \text{binomial}(n-2,\lambda/n)$. Beweisen Sie, dass

$$\mathbb{E}[P_k(n,\lambda/n)] = \mathbb{P}(X_1 = k)$$

und

$$\operatorname{Var} P_k(n,\lambda/n) \leqslant \frac{1}{n}\mathbb{P}(X_1=k) + \frac{\lambda}{n}\big(\mathbb{P}(X_2=k) + \mathbb{P}(X_2=k-1)\big).$$