Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1

Simulieren Sie Erdös-Renyi-Graphen für den sub- und den superkritischen Fall und bestimmen Sie die Größen der größten Zusammenhangskomponenten. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den theoretischen Vorhersagen.

Hinweis: Verwenden Sie z.B. das R-Paket igraph.

Aufgabe 2

Konstruieren Sie Beispiele für Gradfolgen $(d_i)_{i\in[n]}$, so dass $\ell_n = \sum_{i\in[n]} d_i$ gerade ist, aber kein einfacher Graph mit dieser Gradfolge existiert.

Aufgabe 3

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbf{d}_n = (d_i^{(n)})_{i\in[n]}$ mit $d_i^{(n)} \in \mathbb{N}$ und D_n sei eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i\in[n]} \mathbf{1}\{d_i^{(n)} \leqslant x\}$$

für $x \in \mathbb{R}$. Ferner existiere eine ganzzahlige Zufallsvariable D mit $\mathbb{E}[|D|] < \infty$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(D_n \leqslant x) = \mathbb{P}(D \leqslant x)$$

für $x \in \mathbb{R}$ und

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[D_n] = \mathbb{E}[D].$$

Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\mathbb{P}(D_n = k) - \mathbb{P}(D = k)| = 0$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max_{i\in[n]} d_i^{(n)}}{n} = 0.$$

Aufgabe 4

Es sei $(D_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen identisch verteilten ganzzahligen Zufallsvariablen, so dass $0 < \mathbb{P}(D_1 \text{ ist gerade}) < 1$. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} D_i \text{ ist ungerade}\right) = \frac{1}{2}.$$

Hinweis: Für eine ganzzahlige Zufallsvariable X gilt, dass

$$\mathbb{P}(X \text{ ist ungerade}) = \frac{1}{2}\left(1 - \mathbb{E}[(-1)^X]\right).$$