Aufgabenblatt 6

Aufgabe1

Es seien $(G_i')_{i\in\mathbb{N}}$ i.i.d. Kopien einer positiven ganzzahligen Zufallsvariablen G mit $\mathbb{E}[G] < \infty$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $i \in [n]$ sei

$$G_i^{(n)} = \begin{cases} G_i', & i \in [n-1], \\ G_n' + \mathbf{1}\{\sum_{j=1}^n G_j' \text{ ist ungerade}\}, & i = n, \end{cases}$$

und $(\tilde{P}_{k,G}(n))_{k\in\mathbb{N}}$ sei die empirische Gradverteilung von $\mathrm{CM}_n^{(er)}((G_i^{(n)})_{i\in[n]})$. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist dann

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{P}_{k,G}(n) - \mathbb{P}(G=k)| \geqslant \varepsilon \Big) = 0.$$

Aufgabe 2

Für $m \in \mathbb{N}$, $\delta > -m$ und $k \in \mathbb{N}$ sei

$$p_k = \begin{cases} 0, & k < m, \\ (2+\delta/m)\frac{\Gamma(k+\delta)\Gamma(m+2+\delta+\delta/m)}{\Gamma(m+\delta)\Gamma(k+3+\delta+\delta/m)}, & k \geqslant m. \end{cases}$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a.) Durch $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß gegeben.

b.) Es gilt, dass $\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{c_{m,\delta}k^{-\tau}} = 1$ mit

$$\tau = 3 + \delta/m \quad \text{und} \quad c_{m,\delta} = \frac{(2+\delta/m)\Gamma(m+2+\delta+\delta/m)}{\Gamma(m+\delta)}.$$

c.) Für $m = 1$ ist $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Lösung von

$$p_k = \frac{k-1+\delta}{2+\delta}p_{k-1} - \frac{k+\delta}{2+\delta}p_k + \mathbf{1}\{k=1\}$$

für $k \in \mathbb{N}$ mit $p_0 = 0$.

Aufgabe 3

Für $t \in [n]$ und $i \in [t]$ sei $D_i(t)$ der Grad des i-ten Knotens in $\mathrm{PA}_t(1,\delta)$ mit $\delta > -1$. Beweisen Sie, dass für jedes $i \in \mathbb{N}$

$$D_i(t) \to \infty \quad \text{für} \quad t \to \infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

gilt.

Aufgabe 4

Es sei $\delta > -1$ und für $t \in \mathbb{N}$ und $i \in [t]$ sei $D_i(t)$ der Grad des i-ten Knotens in $\mathrm{PA}_t(1,\delta)$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[D_i(t)] = (1+\delta)\frac{\Gamma(t+1)\Gamma\big(i-\frac{1}{2+\delta}\big)}{\Gamma\big(t+\frac{1+\delta}{2+\delta}\big)\Gamma(i)} - \delta.$$