Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1

Für $t \in [n]$ und $i \in [t]$ sei $D_i(t)$ der Grad des i-ten Knotens in $\mathrm{PA}_t(1, \delta)$ mit $\delta > -1$. Beweisen Sie, dass für jedes $i \in \mathbb{N}$

$$D_i(t) \to \infty \quad \text{für} \quad t \to \infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

gilt.

Aufgabe 2

Es sei $\delta > -1$ und für $t \in \mathbb{N}$ und $i \in [t]$ sei $D_i(t)$ der Grad des i-ten Knotens in $\mathrm{PA}_t(1, \delta)$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[D_i(t)] = (1+\delta)\frac{\Gamma(t+1)\Gamma\big(i - \frac{1}{2+\delta}\big)}{\Gamma\big(t + \frac{1+\delta}{2+\delta}\big)\Gamma(i)} - \delta.$$

Aufgabe 3

Beweisen Sie, dass für $k, n \in \mathbb{N}$ und eine beschränkte messbare Funktion $h : ([0,1]^d)^k \times \mathcal{N} \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{E} \sum_{(x_1,\dots,x_k) \in \mathcal{P}^k_{n,\neq}} h(x_1, \dots, x_k, \mathcal{P}_n) = n^k \int_{([0,1]^d)^k} \mathbb{E}[h(x_1, \dots, x_k, \mathcal{P}_n \cup \{x_1, \dots, x_k\})] \, \mathrm{d}(x_1, \dots, x_k)$$

und

$$\mathbb{E} \sum_{(x_1,\dots,x_k) \in \mathcal{X}^k_{n,\neq}} h(x_1, \dots, x_k, \mathcal{X}_n) = (n)_k \int_{([0,1]^d)^k} \mathbb{E}[h(x_1, \dots, x_k, \mathcal{X}_{n-k} \cup \{x_1, \dots, x_k\})] \, \mathrm{d}(x_1, \dots, x_k)$$

mit $(n)_k = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

Aufgabe 4

Simulieren Sie die folgenden Graphen und vergleichen Sie die empirischen Gradverteilungen mit den theoretischen Vorhersagen.

a) Erdös-Renyi-Graphen

b) Konfigurationsmodelle

c) Preferential-Attachment-Graphen

d) Zufällige geometrische Graphen

Hinweis: Verwenden Sie das R-Paket igraph und die Funktionen sample_gnp, sample_degseq, sample_pa und sample_grg.