Institut für Stochastik
Dr. Steffen Winter

Lösungen zur Klausur

GRUNDLAGEN DER WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE UND STATISTIK

für **Studierende der INFORMATIK**
vom 17. Juli 2012 (Dauer: 90 Minuten)

Übersicht über die in den einzelnen Teilaufgaben erreichbaren Punkte:

Aufgabe 1 (10 P)				Aufgabe 2 (12 P)					Aufgabe 3 (9 P)			
a	b	c	d	a	b	c	d	e	a	b	c	d
5	2	2	1	1	2	3	3	3	1	3	3	2

Aufgabe 4 (10 P)					Aufgabe 5 (9 P)				$\sum$
a	b	c	d	e	a	b	c	d	
2	2	2	2	2	2	2	2	3	50

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben sei eine Urliste mit den Paaren $(x_1, y_1), \ldots, (x_9, y_9)$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_j	1	4	7	8	9	5	3	6	2
y_j	2.6	3.2	3.8	4.5	4.7	3.9	2.9	4.3	2.9

a) Berechnen Sie die Stichprobenmittel $\bar{x}$, $\bar{y}$, die Stichproben-Standardabweichungen s_x, s_y und den empirischen Korrelationskoeffizienten r_{xy}.

Hinweis:

$$\sum_{j=1}^{9} x_j = 45, \quad \sum_{j=1}^{9} x_j^2 = 285, \quad \sum_{j=1}^{9} y_j = 32.80, \quad \sum_{j=1}^{9} y_j^2 = 124.30, \quad \sum_{j=1}^{9} x_j \cdot y_j = 180.10.$$

b) Bestimmen Sie die zugehörige Regressionsgerade $y = a^* + b^* \cdot x$ von y auf x.

c) Berechnen Sie das 0.2-getrimmte Stichprobenmittel $\bar{y}_{0.2}$ von $(y_1, \ldots, y_9)$.

d) Bestimmen Sie das Stichproben-$\frac{2}{3}$-Quantil $\tilde{y}_{\frac{2}{3}}$ von $(y_1, \ldots, y_9)$.

Lösung:

a) Direkt aus den Daten ergeben sich nach den Abschnitten 1.4 und 1.5 im Skript mit Hilfe der Beziehung

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}$$

die Ergebnisse

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 5 & s_x &= \left(\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} = 2.739 \\ \bar{y} &= 3.644 & s_y &= 0.7715 \\ r_{xy} &= 0.953. \end{aligned}$$

b) Nach Abschnitt 1.5 des Skripts ist $b^* = r_{xy} \cdot \frac{s_y}{s_x}$ und $a^* = \bar{y} - b^* \cdot \bar{x}$, also

$$\begin{aligned} b^* &= 0.268 \\ a^* &= 2.302 \end{aligned}$$

und die Regressionsgerade $y = 2.956 + 0.138 \cdot x$.

c) Für die Lösung der nächsten drei Aufgabenteile benötigen wir die aufsteigend sortierten y-Werte. Es ist

$$y_{()} = (2.6, 2.9, 2.9, 3.2, 3.8, 3.9, 4.3, 4.5, 4.7).$$

Mit $k = [9 \cdot 0.2] = [1.8] = 1$ ergibt sich

$$\bar{y}_{0.2} = \frac{1}{9 - 2 \cdot 1} \cdot (y_{(2)} + \ldots + y_{(8)}) = 3.643$$

d) Da $9 \cdot \frac{2}{3} = 6$ ganzzahlig ist, ergibt sich

$$\tilde{y}_{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}(y_{(6)} + y_{(7)}) = 4.1.$$

Aufgabe 2 (12 Punkte)
Die gemeinsame Zähldichte $f_{X,Y}(i,j)$ zweier Zufallsvariablen X und Y sei durch die folgende Tabelle gegeben:

$i \backslash j$	0	1	2
0	1/16	0	1/8
1	0	1/8	1/4
2	1/8	1/4	1/16

a) Bestimmen Sie die Zähldichte f_X von X.

b) Berechnen Sie $\mathbb{P}(Y \geq 1)$ und $\mathbb{P}(Y = 2 \mid X = 0)$.

c) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}(X + Y)$ und $\mathbb{E}(X \cdot Y)$.

d) Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten $\rho(X, Y)$ von X und Y. Sind X und Y stochastisch unabhängig? Begründen Sie.

e) Für eine Zufallsvariable Z mit Wertebereich $\{0, 1\}$ sei

$$\mathbb{P}(Z = 0 \mid X = 0) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(Z = 1 \mid X = 1) = \frac{3}{4} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(Z = 0 \mid X = 2) = \frac{1}{7}.$$

Berechnen Sie die gemeinsame Verteilung von X und Z, d.h. $\mathbb{P}(X = i, Z = k)$ für alle $i \in \{0, 1, 2\}$ und $k \in \{0, 1\}$.

Lösung:

a) Für $i \in \{0, 1, 2\}$ gilt $f_X(i) = \sum_{j=0}^{2} f_{X,Y}(i, j)$. $f_X(i)$ ist also durch Summation der Einträge der i-ten Zeile der Tabelle gegeben:

$$f_X(0) = \frac{1}{16} + 0 + \frac{1}{8} = \frac{3}{16}, \qquad f_X(1) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}, \qquad f_X(2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{7}{16}.$$

b) Aus Symmetriegründen (k-te Zeile gleich k-te Spalte) gilt $f_Y = f_X$. Damit folgt direkt

$$\mathbb{P}(Y \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(Y < 1) = 1 - \mathbb{P}(Y = 0) = 1 - f_Y(0) = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

und nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(Y = 2 \mid X = 0) = \frac{\mathbb{P}(Y = 2, X = 0)}{\mathbb{P}(X = 0)} = \frac{f_{X,Y}(0, 2)}{f_X(0)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{16}{3} = \frac{2}{3}.$$

c) Es gilt

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{2} i \cdot f_X(i) = 0 \cdot \frac{3}{16} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{7}{16} = \frac{5}{4},$$

und, da wegen $f_Y = f_X$ auch $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)$ gilt, folgt mit der Additivität des Erwartungswertes

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 2 \cdot \mathbb{E}(X) = \frac{5}{2}.$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X\cdot Y) &= \sum_{i,j=0}^{2} i\cdot j\cdot f_{X,Y}(i,j)\\ &= 1\cdot 1\cdot f_{X,Y}(1,1)+1\cdot 2\cdot f_{X,Y}(1,2)+2\cdot 1\cdot f_{X,Y}(2,1)+2\cdot 2\cdot f_{X,Y}(2,2)\\ &= \frac{1}{8}+2\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{16}=\frac{11}{8}.\end{aligned}$$

d) Da wegen $f_Y = f_X$ neben $\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(X)$ auch $V(Y)=V(X)$ gilt, folgt für den Korrelationskoeffizienten $\rho(X,Y)$ nach Satz 12.23 des Skripts zunächst

$$\rho(X,Y)=\frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\cdot\sqrt{V(Y)}}=\frac{\mathbb{E}(X\cdot Y)-\mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)}{V(X)}=\frac{\mathbb{E}(X\cdot Y)-(\mathbb{E}X)^2}{V(X)}.$$

Wegen

$$\mathbb{E}(X^2)=\sum_{i=0}^{2} i^2\cdot f_X(i)=1^2\cdot f_X(1)+2^2\cdot f_X(2)=\frac{3}{8}+4\cdot\frac{7}{16}=\frac{17}{8}$$

erhalten wir für die Varianz von X (nach Satz 12.11 b) des Skripts)

$$V(X)=\mathbb{E}(X^2)-(\mathbb{E}X)^2=\frac{17}{8}-\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{34-25}{16}=\frac{9}{16}.$$

Oben eingesetzt ergibt sich

$$\rho(X,Y)=\frac{\frac{11}{8}-\left(\frac{5}{4}\right)^2}{\frac{9}{16}}=\frac{22-25}{9}=\frac{-3}{9}=-\frac{1}{3}.$$

X und Y sind somit negativ korreliert. Da stochastische Unabhängigkeit nach Satz 12.23 e) Unkorreliertheit implizieren würde, können X und Y nicht stochastisch unabhängig sein.

e) Nach dem Skript ist $\mathbb{P}(\cdot\mid X=0)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, also gilt

$$\mathbb{P}(Z=0\mid X=0)+\mathbb{P}(Z=1\mid X=0)=\mathbb{P}(Z\in\{0,1\}\mid X=0)=1.$$

Wir erhalten hiermit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=1\mid X=0)&=1-\mathbb{P}(Z=0\mid X=0)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\ \text{und analog}\\ \mathbb{P}(Z=0\mid X=1)&=1-\mathbb{P}(Z=1\mid X=1)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4},\\ \mathbb{P}(Z=1\mid X=2)&=1-\mathbb{P}(Z=0\mid X=2)=1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}.\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Formel $\mathbb{P}(X=i,Z=k)=\mathbb{P}(Z=k\mid X=i)\cdot\mathbb{P}(X=i)$ (Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit) lässt sich nun direkt die gemeinsame Verteilung $f_{X,Z}$ von X und Z bestimmen: Wir erhalten

$$\mathbb{P}(X=0,Z=0)=\mathbb{P}(Z=0\mid X=0)\cdot\mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{16}=\frac{3}{32}$$

und mit analoger Rechnung

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X=0,Z=1)=\frac{3}{32}, &&\mathbb{P}(X=1,Z=0)=\frac{3}{32}, &&\mathbb{P}(X=1,Z=1)=\frac{9}{32},\\ &\mathbb{P}(X=2,Z=0)=\frac{1}{16}, &&\mathbb{P}(X=2,Z=1)=\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Die in regelmäßigen Abständen von einer Woche auszuführenden Kontrollen von 4 Maschinen M_i, $i = 1, \ldots 4$, erfordern folgenden Zeitaufwand t_i (in Stunden):

i	1	2	3	4
t_i	2	5	3	4

Um Überstunden innerhalb eines Arbeitstages von 8 Stunden möglichst zu vermeiden, entschließt man sich, jedes Mal nur 2 Maschinen zu untersuchen, welche zur Vermeidung von Manipulationen zufällig ausgewählt werden. Sei Ω die Menge aller 2-Kombinationen ohne Wiederholung aus der Menge $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ und $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung auf Ω.

a) Wieviele Elemente enthält die Menge Ω?

b) Die Zufallsvariable X beschreibe die zufällige Dauer der Kontrolle der 2 Maschinen. Geben Sie $X(\omega)$ für $\omega \in \Omega$ in Form einer Tabelle an und bestimmen Sie die Zähldichte f_X von X.

c) Die Zufallsvariable K, welche die zufälligen Kontrollkosten beschreibt, sei gegeben durch

$$K := \begin{cases} 50 \cdot X, & \text{falls } X \leq 8, \\ 400 + 74 \cdot (X - 8), & \text{falls } X > 8. \end{cases}$$

Ergänzen Sie die Tabelle aus b) um die Kosten $K(\omega)$ und bestimmen Sie die zu erwartenden Kontrollkosten.

d) Die zwei jeweils zu kontrollierenden Maschinen werden in aufeinanderfolgenden Wochen unabhängig voneinander ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in zwei aufeinanderfolgenden Wochen alle 4 Maschinen kontrolliert werden.

Lösung:

a) Es gilt

$$|\Omega| = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6.$$

Die Elemente von Ω sind in der Tabelle in b) angegeben.

b) Für $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ ist $X(\{M_i, M_j\}) = t_i + t_j$. Die Zufallsvariable X ist also durch die Werte in der folgenden Tabelle bestimmt:

$\omega \in \Omega$	$\{M_1, M_2\}$	$\{M_1, M_3\}$	$\{M_1, M_4\}$	$\{M_2, M_3\}$	$\{M_2, M_4\}$	$\{M_3, M_4\}$
$X(\omega)$	7	5	6	8	9	7
$K(\omega)$	350	250	300	400	474	350

Der Wertebereich von X ist $W_X = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Aufgrund der Gleichverteilungsannahme hat jedes $\omega \in \Omega$ die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$. Da jeder Wert von X außer 7 nur für ein $\omega \in \Omega$ angenommen wird (und 7 für 2), gilt für die Zähldichte von X:

$$f_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{für } k = 5, 6, 8, 9 \\ \frac{2}{6} & \text{für } k = 7 \end{cases}$$

c) Die Werte der Zufallsvariable K sind in der letzten Zeile der Tabelle in b) angegeben. Zur Bestimmung des Erwartungswertes von K genügt es, die Werte dieser Tabellenzeile mit den Gewichten $\frac{1}{6}$ aufzusummieren:

$$\mathbb{E}(K) = \frac{1}{6}\,(350 + 250 + 300 + 400 + 474 + 350) = \frac{2124}{6} = 354.$$

d) Wegen der Unabhängigkeitsannahmen ist die Menge der möglichen Auswahlen von je zwei Maschinen an 2 aufeinanderfolgenden Wochen durch Ω^2 beschrieben. Die günstigen Auswahlen des Ereignisses „*alle 4 Maschinen kontrolliert*“ lassen sich folgendermaßen charakterisieren: In der ersten Woche kann jede beliebige Auswahl (der sechs möglichen) getroffen werden, in der zweiten Woche müssen dann die in der ersten Woche nicht gewählten Maschinen ausgewählt werden (eine Möglichkeit). Es gilt also

$$\mathbb{P}(\text{„}\textit{in 2 Wochen alle 4 Maschinen kontrolliert}\text{“}) = \frac{|\Omega|}{|\Omega^2|} = \frac{|\Omega|}{|\Omega|^2} = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{6}.$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Eine Maschine dreht zylinderförmige Kolben mit Solldurchmesser $d = 20$ und Sollhöhe $h = 25$. Tatsächlich sind der Durchmesser X und die Höhe Y Zufallsvariablen mit den Verteilungen $\mathcal{N}(20, 1/4)$ bzw. $\mathcal{N}(25, 1/9)$, die als unabhängig angenommen seien. Der zufällige Kolbenumfang sei $U := \pi \cdot X$ und der zufällige Materialverbrauch sei $M := \frac{\pi}{4} X^2 \cdot Y$.

a) Berechnen Sie den den Erwartungswert $\mathbb{E}(U)$ und die Varianz $V(U)$ von U.

b) Drücken Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(62 \leq U \leq 64)$ mit Hilfe der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0, 1)$ aus.

c) Berechnen Sie den mittleren Materialverbrauch $\mathbb{E}(M)$.

d) Berechnen Sie das 0.975-Quantil $t_{0.975}(X)$ von X.

e) Ein Kolben muss nachbearbeitet werden, wenn $X > 20.5$ oder wenn $Y > 25.6$ gilt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kolben nachbearbeitet werden muss.

Lösung:

a) Da $X \sim \mathcal{N}(20, \frac{1}{4})$, hat die Zufallsvariable $U = \pi X$ nach Satz 9.7 im Skript die Verteilung $\mathcal{N}(20\pi, \frac{\pi^2}{4})$. Somit folgt

$$\mathbb{E}(U) = 20 \cdot \pi \qquad\qquad V(U) = \frac{\pi^2}{4}.$$

b) Für die normalverteilte Zufallsvariable U ist die Standardisierung

$$\tilde{U} = \frac{U - \mathbb{E}U}{\sqrt{V(U)}} = \frac{U - 20\pi}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}(U - 20\pi) = \frac{2}{\pi}U - 40$$

standardnormalverteilt. Deshalb gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(62 \leq U \leq 64) &= \mathbb{P}(\frac{2}{\pi}62 - 40 \leq \frac{2}{\pi}U - 40 \leq \frac{2}{\pi}64 - 40) \\ &= \mathbb{P}(\frac{124}{\pi} - 40 \leq \tilde{U} \leq \frac{128}{\pi} - 40) \\ &= \Phi(\frac{128}{\pi} - 40) - \Phi(\frac{124}{\pi} - 40).\end{aligned}$$

c) Wegen der Unabhängigkeit von X und Y gilt

$$\mathbb{E}(M) = \mathbb{E}(\frac{\pi}{4}X^2 \cdot Y) = \frac{\pi}{4}\mathbb{E}(X^2) \cdot \mathbb{E}(Y).$$

Dabei folgt aus der Gleichung $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$ (vgl. Satz 12.11 im Skript)

$$\mathbb{E}(X^2) = V(X) + (\mathbb{E}X)^2 = \frac{1}{4} + 20^2 = \frac{1601}{4} = 400.25$$

und somit

$$\mathbb{E}(M) = \frac{\pi}{4}\mathbb{E}(X^2) \cdot \mathbb{E}(Y) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1601}{4} \cdot 25 = \pi\frac{40025}{16} \approx 7858,89.$$

d) Da X normalverteilt ist, ist die Standardisierung $\tilde{X} = \frac{1}{\sigma}(X - \mathbb{E}X) = 2(X-20)$ standardnormalverteilt. Wegen $X = \frac{1}{2}\tilde{X} + 20$ gilt nach Bemerkung 12.20 im Skript für das 0.975-Quantil von X:

$$t_{0.975}(X) = t_{0.975}(\frac{1}{2}\tilde{X} + 20) = \frac{1}{2}t_{0.975}(\tilde{X}) + 20 = \frac{1}{2}F_{\tilde{X}}^{-1}(0.975) + 20 = \frac{1}{2}\Phi^{-1}(0.975) + 20.$$

Nach der Tabelle auf S.130 im Skript (bzw. Anh. A1) ergibt sich $t_{0.975}(X) \approx \frac{1}{2} \cdot 1.96 + 20 = 20.98$.

e) Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{„}\textit{Kolben muss nachbearbeitet werden}\text{“}) &= \mathbb{P}(X > 21 \text{ oder } Y > 25.6)\\ &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 20.5 \text{ und } Y \leq 25.6)\\ &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 20.5) \cdot \mathbb{P}(Y \leq 25.6)\end{aligned}$$

wegen der Unabhängigkeit von X und Y. Da

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X \leq 20.5) = \mathbb{P}(\tilde{X} \leq 2(20.5-20)) = \mathbb{P}(\tilde{X} \leq 1) = \Phi(1) \quad \text{und}\\ &\mathbb{P}(Y \leq 25.6) = \mathbb{P}(\tilde{Y} \leq 3(25.6-25)) = \mathbb{P}(\tilde{Y} \leq 1.8) = \Phi(1.8),\end{aligned}$$

ergibt sich mit der Tabelle A1 im Skript eine Wahrscheinlichkeit von

$$\mathbb{P}(X > 21 \text{ oder } Y > 25.6) = 1 - \Phi(1) \cdot \Phi(1.8) \approx 0.1889,$$

d.h. etwa 18.9 Prozent der Kolben müssen nachbearbeitet werden.

Aufgabe 5 (9 Punkte)

Es soll der unbekannte Parameter $\vartheta \in \mathbb{R}$ für die Verteilung mit der Dichte

$$f_\vartheta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot t} e^{-\frac{1}{2}(\log t - \vartheta)^2}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

bestimmt werden.

a) Geben Sie die zur Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n)$ gehörende Loglikelihood-Funktion $M_x(\vartheta)$ an. Sie dürfen dabei voraussetzen, dass $x_i > 0$ für $i = 1, \dots, n$.

b) Berechnen Sie die Ableitung $M_x'(\vartheta)$.

c) Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta}(x)$ für ϑ zur Stichprobe x.

d) Ist $\hat{\vartheta}$ ein erwartungstreuer Schätzer für ϑ? Begründen Sie!

Hinweis: Für eine Zufallsvariable X mit Dichte f_ϑ gilt: $\log X \sim \mathcal{N}(\vartheta, 1)$.

Lösung:

a) Für $t > 0$ ist

$$\log(f_\vartheta(t)) = -\log(\sqrt{2\pi}\cdot t) - \frac{1}{2}(\log t - \vartheta)^2,$$

also ist die Loglikelihoodfunktion

$$\begin{aligned} M_x(\vartheta) &= \sum_{j=1}^n \log(f_\vartheta(x_j)) = \sum_{j=1}^n \left[-\log(\sqrt{2\pi}\cdot x_j) - \frac{1}{2}(\log x_j - \vartheta)^2\right] \\ &= \sum_{j=1}^n \left[-\log(\sqrt{2\pi}\cdot x_j) - \frac{1}{2}\left((\log x_j)^2 - 2\log x_j \vartheta + \vartheta^2\right)\right] \\ &= \sum_{j=1}^n \log(\sqrt{2\pi}\cdot x_j) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n (\log x_j)^2 + \vartheta \sum_{j=1}^n \log x_j - \frac{1}{2} n\vartheta^2 \end{aligned}$$

b) Für die Ableitung nach ϑ gilt somit

$$M_x'(\vartheta) = \sum_{j=1}^n \log x_j - n\cdot\vartheta.$$

c) Offenbar gilt $M_x'(\vartheta) = 0$ genau dann, wenn $\vartheta = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \log x_j$. Außerdem gilt

$$M_x'(\vartheta) \left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\} 0 \iff \vartheta \left\{ \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \right\} \hat{\vartheta}(x) := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \log x_j\ .$$

Daher ist $\hat{\vartheta}(x)$ die einzige Maximumstelle von $\vartheta \mapsto M_x(\vartheta)$ und somit ein Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ zur Stichprobe x.

d) Für die Erwartungstreue von $\hat{\vartheta}(x) = \hat{\vartheta}(x_1, \dots, x_n)$ ist zu zeigen, dass für alle $\vartheta \in \mathbb{R}$ gilt: $\mathbb{E}_\vartheta \hat{\vartheta}(X_1, \dots, X_n) = \vartheta$, wobei $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit der Dichte f_ϑ sind.

Da X_i die Dichte f_ϑ hat, folgt mit dem Hinweis, dass die Zufallsvariable $Y_i := \log X_i$ die Verteilung $\mathcal{N}(\vartheta, 1)$ hat und somit $\mathbb{E}_\vartheta Y_i = \vartheta$ gilt. Damit folgt für alle $\vartheta \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}_\vartheta \hat{\vartheta}(X_1, \dots, X_n) = \mathbb{E}_\vartheta \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log X_i \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_\vartheta \left(\log X_i \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \vartheta = \vartheta.$$

Also ist $\hat{\vartheta}(x)$ ein erwartungstreuer Schätzer für ϑ.