Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik
Dr. B. Ebner

Name:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Lösungen zur Klausur zum Fach

GRUNDLAGEN DER WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE UND STATISTIK

für Studierende der INFORMATIK

Datum: **17. Juli 2013**

Dauer: **90 Minuten**

Achtung:
Diese Klausur hat bestanden, wer mindestens 18 Punkte erreicht.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben sei eine Urliste mit den Paaren $(x_1, y_1), \dots, (x_{11}, y_{11})$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_j	52	53	57	58	62	65	67	68	77	80	85
y_j	7.0	10.0	8.0	10.5	7.5	13.5	11.5	12.0	16.5	13.0	22.0

a) Berechnen Sie die Stichprobenmittel $\bar{x}, \bar{y}$, die Stichproben-Standardabweichungen s_x, s_y und den empirischen Korrelationskoeffizienten r_{xy} von $(x_1, y_1), \dots, (x_{11}, y_{11})$.

Hinweis:

$$\sum_{j=1}^{11} x_j = 724, \sum_{j=1}^{11} x_j^2 = 48862, \sum_{j=1}^{11} y_j = 131.5, \sum_{j=1}^{11} y_j^2 = 1763.25, \sum_{j=1}^{11} x_j \cdot y_j = 9068.5.$$

b) Bestimmen Sie die zugehörige Regressionsgerade $y = a^* + b^* \cdot x$ von y auf x.

c) Berechnen Sie das 0.2-getrimmte Stichprobenmittel $\bar{x}_{0.2}$ von $(x_1, \dots, x_{11})$.

d) Bestimmen Sie das Stichproben-0.35-Quantil $\tilde{x}_{0.35}$ und den Stichproben Median $\tilde{x}$ von $(x_1, \dots, x_{11})$.

Lösung:

a) Direkt aus den Daten ergibt sich gemäß Definition 1.8 und Paragraph 1.5 unter Ausnützung der Beziehung

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$\bar{x} = 65.81818 \qquad s_x = 10.99835$$
$$\bar{y} = 11.95455 \qquad s_y = 4.372954$$
$$r_{xy} = 0.859563$$

b) Nach Paragraph 1.5 ist $b^* = r_{xy} \cdot \dfrac{s_y}{s_x}$ und $a^* = \bar{y} - b^* \cdot \bar{x}$, also

$$\begin{aligned} b^* &= 0.3418 \\ a^* &= -10.5397 \end{aligned}$$

und die Regressionsgerade $y = -10.5397 + 0.3418 \cdot x$.

c) Da die Werte der Stichprobe x schon sortiert sind, ergibt sich mit $k = [11 \cdot 0.2] = 2$ ergibt sich

$$\bar{x}_{0.2} = \frac{1}{11 - 2 \cdot 2} \cdot (x_{(3)} + \ldots + x_{(9)}) = 64.85714$$

d) Da $11 \cdot 0.35 = 3.85$ nicht ganzzahlig ist, ist mit $k = [3.85] = 3$

$$\tilde{x}_{0.35} = x_{(k+1)} = x_{(4)} = 58.$$

Da $n = 11$ ungerade ist, ist der Stichproben-Median gegeben durch

$$\tilde{x} = x_{(6)} = 65.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es wird n-mal, $n \in \mathbb{N}$, in unabhängiger Folge eine faire Münze mit den Seiten Kopf (K) und Zahl (Z) geworfen. Dabei bezeichnet die Zufallsvariable

$$X_j := \begin{cases} 1, & \text{falls } K \text{ oben liegt,} \\ 0, & \text{falls } Z \text{ oben liegt,} \end{cases}$$

den Ausgang des Experiments nach dem j-ten Wurf, $j = 1, \ldots, n$. Die Zufallsvariable $S_n := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j$ bezeichne die relative Häufigkeit der K-Würfe nach n Runden.

a) Welche Werte kann die Zufallsvariable S_n annehmen? Welche Verteilungen haben die Zufallsvariablen $\sum_{j=1}^{n} X_j$ und S_n?

b) Bestimmen Sie $\mathbb{E}(S_n)$ und $V(S_n)$.

c) Gegen was strebt die Zufallsvariable S_n für $n \to \infty$? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

d) Die Münze wird nun sooft geworfen bis zum **dritten** Mal Kopf auftritt. Die Zufallsvariable Y gebe die Anzahl der Versuche bis zu diesem Zeitpunkt an, bei denen Zahl geworfen wurde. Welche Verteilung hat Y?

e) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(Y = 5)$ und $\mathbb{P}(Y \geq 2)$.

Lösung:

a) Die Zufallsvariable S_n nimmt durch die Mittelung nur Werte zwischen 0 und 1 an. Es gilt $S_n \in \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\} =: W$. Da es sich hier um ein Treffer-Niete-Experiment handelt und die Münze in unabhängigerweise geworfen wird, gilt $X_1 \sim \text{Bin}\left(1, \frac{1}{2}\right)$ und damit nach dem Additionsgesetz der Binomialverteilung

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \sim \text{Bin}\left(n, \frac{1}{2}\right).$$

Weiter gilt für $k \in W$

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j = n \cdot k\right) = \binom{n}{n \cdot k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n \cdot k} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n - n \cdot k} = \binom{n}{n \cdot k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

b) Es gilt wegen der Linearität des Erwartungswerts und $\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \frac{n}{2}$

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{n} \cdot \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \frac{1}{2}.$$

Weiter gilt mit der Unabhängigkeit der X_j und $V(X_1) = \frac{1}{4}$

$$V(S_n) = \frac{1}{n^2} \cdot V\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} V(X_j) = \frac{1}{4 \cdot n}.$$

c) Für $n \to \infty$ strebt S_n gegen $\frac{1}{2}$. Dies gilt wegen dem starken Gesetz großer Zahlen. Alternativ kann man dies auch über die Tschebyschev-Ungleichung schließen.

d) Die Zufallsvariable Y ist Negativ Binomial verteilt (vgl. Definition 7.16 Skript), also $Y \sim \text{Nb}\left(3, \frac{1}{2}\right)$.

e) Es gilt

$$\mathbb{P}(Y=5) = \binom{3+5-1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^5 = \binom{7}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^8 \approx 0.082.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \geq 2) &= 1 - \mathbb{P}(Y \leq 1) \\
&= 1 - \mathbb{P}(Y=1) - \mathbb{P}(Y=0) \\
&= 1 - \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \\
&= 1 - \frac{3}{16} - \frac{1}{8} = 0.6875.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

In einem Fertigungsprozess werden Würfel produziert mit der Kantenlänge $Y = 20 + X$ (in mm). Dabei bezeichnet $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ den im Fertigungsprozess entstehenden Fehler.

a) Geben Sie die Verteilung von $2 \cdot Y$ und von X^2 an.

b) Bestimmen Sie $C(X^2, X)$ und $C(X^3, X)$.

c) Geben Sie Erwartungswert und Varianz des Flächeninhalts F einer Seitenfläche des Würfels an.

d) Drücken Sie die Verteilungsfunktion des Volumens $V = Y^3$ des Würfels durch die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung Φ aus und berechnen Sie

$$\mathbb{P}(6859 \leq V < 8000).$$

Lösung:

a) Es gilt mit den Rechenregeln für normalverteilte Zufallsvariablen

$$2 \cdot Y \sim \mathcal{N}(40, 4) \quad \text{und} \quad X^2 \sim \chi_1^2.$$

b) Es gilt für gerades k und ungerades l (damit ist $k + l$ ungerade) mit Beispiel 12.16 a) und der Formel aus Satz 12.23 a) aus dem Skript

$$C\left(X^k, X^l\right) = \mathbb{E}\left(X^{k+l}\right) - \mathbb{E}\left(X^k\right) \cdot \mathbb{E}\left(X^l\right) = 0 - 0 = 0.$$

Also gilt im speziellen $C\left(X^2, X\right) = 0$. Weiter gilt mit $\sigma^2 = V\left(X_1\right) = 1$

$$C\left(X^3, X\right) = \mathbb{E}\left(X^4\right) - \mathbb{E}\left(X^3\right) \cdot \mathbb{E}\left(X\right) = 3 \cdot 1 \cdot \sigma^4 - 0 = 3.$$

c) Der zufällige Flächeninhalt einer Seitenfläche ist $F = Y^2$. Damit gilt mit $V(Y) = 1$ und $\mathbb{E}(Y) = 20$

$$\mathbb{E}(F) = \mathbb{E}(Y^2) = V(Y) + (\mathbb{E}(Y))^2 = 401.$$

Die Varianz ist mit den Ergebnissen aus Teil b) gegeben durch

$$\begin{aligned} V(F) &= V\left((X+20)^2\right) = V(X^2 + 40X + 400) \\ &= V(X^2 + 40X) = V(X^2) + V(40X) + 2C(X_1^2, 40X_1) \\ &= \mathbb{E}(X^4) - \left(\mathbb{E}(X^2)\right)^2 + 1600V(X) + 80C(X^2, X) \\ &= 3 - 1 + 1600 + 80 \cdot 0 = 1602. \end{aligned}$$

d) Es gilt für $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V \leq t) &= \mathbb{P}(Y^3 \leq t) = \mathbb{P}\left(Y \leq t^{\frac{1}{3}}\right) = \mathbb{P}\left(Y - 20 \leq t^{\frac{1}{3}} - 20\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X \leq t^{\frac{1}{3}} - 20\right) = \Phi\left(t^{\frac{1}{3}} - 20\right). \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(6859 \leq V < 8000) &= \Phi\left(8000^{\frac{1}{3}} - 20\right) - \Phi\left(6859^{\frac{1}{3}} - 20\right) \\ &= \Phi\left(0\right) - \Phi\left(-1\right) \\ &= \frac{1}{2} - (1 - \Phi(1)) = \Phi(1) - \frac{1}{2} \approx 0.3413. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Ein Merkmal habe die Dichte

$$t \to f_\vartheta(t) := \begin{cases} \frac{4}{\vartheta} \cdot t^3 \cdot e^{-t^4/\vartheta}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0, \end{cases}$$

wobei $\vartheta \in \Theta := (0, \infty)$ ein unbekannter Parameter ist. Der unbekannte Parameter ϑ soll aufgrund einer unabhängigen Stichprobe $x = (x_1, \ldots, x_n)$ geschätzt werden, wobei $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$ sind.

a) Geben Sie die Likelihood-Funktion $L_x(\vartheta)$ und die Log-Likelihood-Funktion $M_x(\vartheta)$ an.

b) Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta}(x_1, \ldots, x_n)$ für ϑ durch

$$\hat{\vartheta}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j^4$$

gegeben ist.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert von $\hat{\vartheta}(X) = \hat{\vartheta}(X_1, \ldots, X_n)$.
Hinweis: Nützen Sie aus, dass $Y_j := X_j^4$ die Verteilung $Exp(1/\vartheta)$ besitzt (kein Beweis erforderlich).

d) Ist $\hat{\vartheta}(X_1, \ldots, X_n)$ ein erwartungstreuer Schätzer für ϑ?

e) Ist $\hat{\vartheta}(X_1, \ldots, X_n)$ ein konsistenter Schätzer für ϑ? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

Lösung:

a) Die Likelihood Funktion $L_x(\vartheta)$ ist gegeben durch

$$L_x(\vartheta) = \prod_{j=1}^{n} f_\vartheta(x_j) = \prod_{j=1}^{n} \frac{4}{\vartheta} \cdot x_j^3 \cdot e^{-x_j^4/\vartheta} = \frac{4^n}{\vartheta^n} \cdot e^{-\sum_{j=1}^{n} x_j^4/\vartheta} \cdot \prod_{j=1}^{n} x_j^3.$$

Es ist

$$\log(f_\vartheta(t)) = \log(4) - \log(\vartheta) + 3 \cdot \log(t) - \frac{t^4}{\vartheta}, \qquad t > 0,$$

also

$$\begin{aligned} M_x(\vartheta) &= \sum_{j=1}^{n} \log(f_\vartheta(x_j)) = \sum_{j=1}^{n} \left(\log(4) - \log(\vartheta) + 3 \cdot \log(x_j) - \frac{x_j^4}{\vartheta} \right) \\ &= n \log(4) - n \log(\vartheta) + 3 \cdot \sum_{j=1}^{n} \log(x_j) - \frac{1}{\vartheta} \sum_{j=1}^{n} x_j^4. \end{aligned}$$

b) Es gilt

$$M_x'(\vartheta) = -\frac{n}{\vartheta} + \frac{1}{\vartheta^2} \sum_{j=1}^{n} x_j^4 = -\frac{1}{\vartheta^2} \left(n\vartheta - \sum_{j=1}^{n} x_j^4 \right) \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0$$

genau dann, wenn (beachte $-\frac{1}{\vartheta^2} < 0$)

$$\vartheta \begin{array}{c} < \\ = \\ > \end{array} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^4 =: \hat{\vartheta}(x).$$

Daher ist $\hat{\vartheta}(x)$ die einzige Maximumstelle von $\vartheta \to M_x(\vartheta)$, insbesondere ist

$$(x_1, \ldots, x_n) \to \hat{\vartheta}(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^4$$

der gesuchte Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ.

c) Es ist

$$\hat{\vartheta}(X) \; = \; \hat{\vartheta}(X_1, \ldots, X_n) \; = \; \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j \; ,$$

also wegen $\mathbb{E}_\vartheta Y_j = \frac{1}{1/\vartheta} = \vartheta$ (Hinweis)

$$\mathbb{E}_\vartheta \hat{\vartheta}(X) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_\vartheta Y_j \; = \; \frac{1}{n} \cdot n \cdot \vartheta \; = \; \vartheta.$$

d) Da $\mathbb{E}_\vartheta \hat{\vartheta}(X) = \vartheta \quad \forall \vartheta \in \Theta$, ist T_n ein erwartungstreuer Schätzer für ϑ.

e) Es gilt wegen der Unabhängigkeit der $Y_1, \ldots, Y_n$ (Blockungslemma!) und $V_\vartheta(Y_1) = \frac{1}{\frac{1}{\vartheta^2}}$

$$V_\vartheta(\hat{\vartheta}(X)) = V_\vartheta\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} V_\vartheta(Y_j) = \frac{1}{n} \cdot \vartheta^2.$$

Für $n \to \infty$ geht $V_\vartheta(\hat{\vartheta}(X)) \to 0$ und damit folgt aus der Tschebyschev-Ungleichung die Konsistenz des Schätzers.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Bei der Herstellung von Trinkhalmen ist eine Längenabweichung von der Solllänge um höchstens $5mm$ gestattet. In einer Qualitätskontrolle wurden von einer Maschine in unabhängiger Weise aus der laufenden Produktion 500 Trinkhalme entnommen und die jeweilige Länge überprüft. Dabei stellte sich heraus, dass 43 Trinkhalme die geforderte Längenabweichung nicht einhielten. Es sei $\vartheta \in (0,1)$ die unbekannte Wahrscheinlichkeit für die Nichteinhaltung der Längenabweichung.

a) Geben Sie die Verteilung für die den Daten zugrunde liegenden Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_{500}$ an.

b) Geben Sie einen geeigneten Schätzer $\hat{\vartheta}$ für ϑ und den für die obige Stichprobe geltenden Schätzwert $\hat{\vartheta}(x)$ an.

c) Geben Sie ein approximatives Konfidenzintervall für ϑ zum Konfidenzniveau 0.95 an.

d) Die Maschine darf höchstens einen Ausschuss von 5% produzieren. Können Sie aufgrund der Ergebnisse aus Teilaufgabe c) dem Betreiber der Maschine empfehlen, die Maschine neu zu justieren?

Lösung:

a) Es handelt sich um ein Treffer-Niete-Experiment. Dabei bezeichnen wir als Treffer, wenn die tolerierte Längenabweichung nicht eingehalten wurde. Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ sind stochastisch unabhängig und identisch verteilt. Es gilt $X_1 \sim \mathrm{Bin}(1, \vartheta)$ mit einem unbekannten Parameter $\vartheta \in (0,1)$.

b) Ein geeigneter Schätzer für die unbekannte Trefferwahrscheinlichkeit ϑ ist das arithmetische Mittel

$$\hat{\vartheta}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = \bar{x}_n.$$

Für die vorliegende Stichprobe gilt $\hat{\vartheta}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{43}{500}$.

c) Die Grenzen des approximativen Konfidenzintervalls ist laut Skript Beispiel 18.10 mit dem $1 - \frac{\alpha}{2}$ Quantil der Standardnormalverteilung $h := u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} l_n(x_1, \ldots, x_n) &= \frac{\bar{x}_n + \frac{h^2}{2n} - \frac{h}{\sqrt{n}}\sqrt{\bar{x}_n(1-\bar{x}_n) + \frac{h^2}{4n}}}{1 + \frac{h^2}{n}}, \\ L_n(x_1, \ldots, x_n) &= \frac{\bar{x}_n + \frac{h^2}{2n} + \frac{h}{\sqrt{n}}\sqrt{\bar{x}_n(1-\bar{x}_n) + \frac{h^2}{4n}}}{1 + \frac{h^2}{n}}. \end{aligned}$$

Mit dem Konfidenzniveau 0.95 ($\alpha = 0.05$), $h := u_{0.975} = 1.96$ und $n = 500$ gilt

$$l_{500}(x_1, \ldots, x_{500}) = 0.0644728 \quad \text{und} \quad L_{500}(x_1, \ldots, x_{500}) = 0.1138404.$$

Also ist das Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.95 für den unbekannten Parameter ϑ gegeben durch

$$\mathcal{C}_n(x_1, \ldots, x_n) = [0.0644728, 0.1138404].$$

d) Da $0.05 \notin \mathcal{C}_n(x_1, \ldots, x_n)$ liegt, kann aufgrund des Konfidenzintervalls eine Empfehlung für eine Justage der Maschine gegeben werden.

Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der Standard – Normalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000