INSTITUT FÜR STOCHASTIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Priv.-Doz. Dr. D. Kadelka

WS 2006/07

Klausur

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
vom 2.3.2007

Musterlösungen

Aufgabe A1:

Gegeben sei eine Urliste mit den Paaren $(x_1, y_1), \ldots, (x_{10}, y_{10})$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_j	1	1.7	3.1	4.1	4.9	6.1	7.3	8.1	9.1	9.7
y_j	7.4	7.1	6.2	3.9	4.5	4.6	−0.5	2.4	0.4	−1.2

a) Berechnen Sie die Stichprobenmittel $\bar{x}$, $\bar{y}$, die Stichproben-Standardabweichungen s_x, s_y und den empirischen Korrelationskoeffizienten r_{xy}.
Lösung: Direkt aus den Daten ergibt sich gemäß Definition 1.8 und Paragraph 1.5 unter Ausnützung der Beziehung

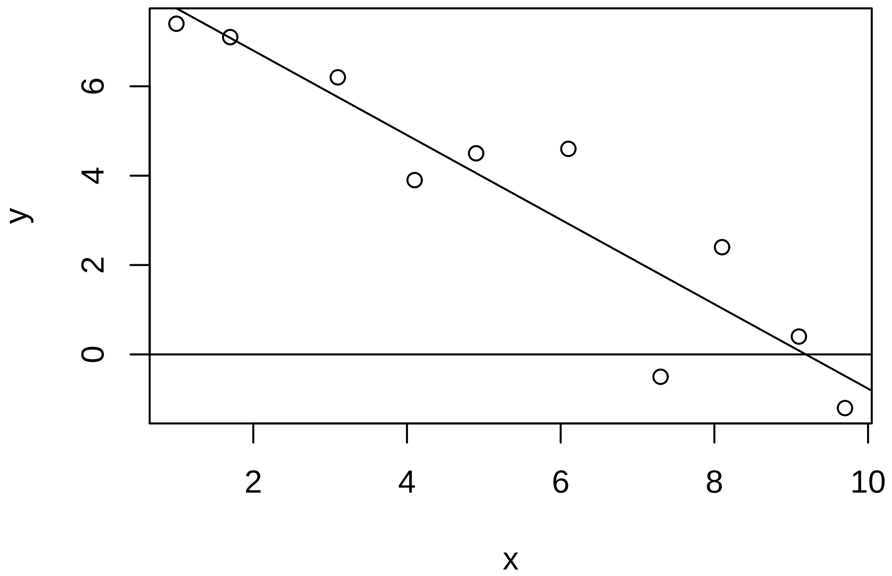
$$\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 5.51 & \qquad s_x &= 3.05 \\ \bar{y} &= 3.48 & \qquad s_y &= 3.104 \\ r_{xy} &= -0.929 \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie die zugehörige Regressionsgerade $y = a^* + b^* \cdot x$ von y auf x.
Lösung: Nach Paragraph 1.5 ist $b^* = r_{xy} \cdot \dfrac{s_y}{s_x}$ und $a^* = \bar{y} - b^* \cdot \bar{x}$, also

$$\begin{aligned} b^* &= -0.946 \\ a^* &= 8.69 \end{aligned}$$

und die Regressionsgerade $y = 8.69 - 0.946 \cdot x$.



Punkte und Regressionsgerade $y = a^* + b^* \cdot x$

Für die Lösung der nächsten drei Aufgabenteile benötigen wir die aufsteigend sortierten y-Werte. Es ist

$$y_{()} = (-1.2,\ -0.5,\ 0.4,\ 2.4,\ 3.9,\ 4.5,\ 4.6,\ 6.2,\ 7.1,\ 7.4)$$

c) Berechnen Sie das 0.2-getrimmte Stichprobenmittel $\bar{y}_{0.2}$ von $(y_1, \ldots, y_{10})$.
Lösung: Mit $k = [10 \cdot 0.2] = 2$ ergibt sich

$$\bar{y}_{0.2} = \frac{1}{10 - 2 \cdot 2} \cdot (y_{(3)} + \ldots + y_{(8)}) = 3.667$$

d) Bestimmen Sie das Stichproben-0.2-Quantil $\tilde{y}_{0.2}$ von $(y_1, \ldots, y_{10})$.
Lösung: Da $10 \cdot 0.2 = 2$ ganzzahlig ist, ist mit $k = [2] = 2$

$$\tilde{y}_{0.2} = \frac{y_{(k)} + y_{(k+1)}}{2} = \frac{y_{(2)} + y_{(3)}}{2} = -0.05$$

Aufgabe A2:

Die Zufallsvariable X besitze die Verteilung $\mathcal{N}(8,9)$ und die Zufallsvariable Y die Verteilung $\mathcal{N}(-3,16)$. X und Y seien stochastisch unabhängig.

a) Welche Verteilung besitzt $Z := X + Y$ und welche Verteilung besitzt $U := X - Y$?

b) Bestimmen Sie die Varianz $V(U)$ von U.

c) Berechnen Sie die Kovarianz $C(U,Y)$ von U und Y. Sind U und Y positiv korreliert, negativ korreliert oder unkorreliert?

d) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X \geq 14)$.

e) Berechnen Sie das 0.975-Quantil von Y.

Lösung:

a) Es ist $-Y \sim \mathcal{N}(3,16)$, also nach der Faltungsformel 11.16

$$\begin{aligned} Z &\sim \mathcal{N}(8-3, 9+16) = \mathcal{N}(5,25), \\ U = X + (-Y) &\sim \mathcal{N}(8+3, 9+16) = \mathcal{N}(11,25). \end{aligned}$$

b) Der zweite Parameter von $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ ist die Varianz dieser Verteilung, also wegen b) $V(Z) = 25$.

c) Wegen Satz 12.23 und der Unabhängigkeit von X und Y gilt

$$C(U,Y) = C(X-Y,Y) = C(X,Y) - C(Y,Y) = 0 - V(Y) = -16.$$

Hieraus erhält man ohne Rechnung, dass $\rho(U,Y) < 0$ ist. Daher sind U und Y negativ korreliert.

d) Wegen der Stetigkeit von $\mathcal{N}(8,9)$ gilt nach (9.6) und Tabelle A.1

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 14) = \mathbb{P}(X > 14) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 14) &= 1 - \Phi\left(\frac{14-8}{3}\right) \\ &= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = \underline{0.0228}. \end{aligned}$$

e) Nach Definition 12.19 gilt, dass $t_{0.975}$ die Lösung ist von

$$\Phi_{-3,16}(t_{0.975}) = \Phi\left(\frac{t_{0.975} - (-3)}{4}\right) = 0.975.$$

Wegen $\Phi(1.96) = 0.975)$ gilt also

$$\frac{t_{0.975} + 3}{4} = 1.96$$

und daraus $t_{0.975} = 4 \cdot 1.96 - 3 = \underline{4.84}$. (Man kann hierfür auch 12.20 c) benützen.)

Aufgabe A3:

Ein Arbeiter überwacht 3 Aggregate, die unabhängig voneinander arbeiten. Sei A_i das Ereignis, dass Aggregat i einer Überprüfung bedarf und $p_i = \mathbb{P}(A_i)$ die zugehörige Wahrscheinlichkeit, $i = 1,2,3$, mit $p_1 = 0.2$, $p_2 = 0.4$ und $p_3 = 0.6$. Die Ereignisse A_1, A_2 und A_3 seien stochastisch unabhängig.
B sei das Ereignis „Mindestens ein Aggregat bedarf einer Überprüfung“.

a) Berechnen Sie $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ und $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2)$.

b) Stellen Sie B formelmäßig mit Hilfe von A_1, A_2, A_3 dar.

c) Berechnen Sie $\mathbb{P}(B)$.

d) Berechnen Sie die (bedingte) Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A_1 \mid B)$, dass Aggregat 1 einer Überprüfung bedarf, wenn mindestens ein Aggregat einer Überprüfung bedarf.

Lösung: a) Da A_1, A_2 und A_3 unabhängig sind, gilt

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3) = 0.048.$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \\ &\overset{A_1,A_2 \text{ unabhängig}}{=} p_1 + p_2 - \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2 = 0.52\end{aligned}$$

b) Dass mindestens ein Aggregat der Überprüfung bedarf, ist gleichbedeutend damit, dass Aggregat 1 **oder** 2 **oder** 3 einer Überprüfung bedarf. Daher gilt

$$B = A_1 \cup A_2 \cup A_3.$$

c) Wegen der Formel des Ein- und Ausschließens gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= p_1 + p_2 + p_3 - p_1 p_2 - p_1 p_3 - p_2 p_3 + p_1 p_2 p_3 = 0.808\end{aligned}$$

d) Nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit gilt wegen $A_1 \subset B$ (wenn 1 einer Überprüfung bedarf, bedarf insbesondere mindestens ein Aggregat der Überprüfung)

$$\mathbb{P}(A_1 \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0.2}{0.808} = 0.2475$$

Aufgabe A4:

Eine Messeinrichtung habe eine zufällige Lebensdauer mit Verteilung $Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$. Immer wenn eine Messeinrichtung ausfällt, wird sie durch eine gleichartige neue ersetzt. Das Ersetzen dauert genau 3 Zeiteinheiten. Die Lebensdauern $X_1, X_2, \ldots$ der einzelnen Messeinrichtungen seien unabhängig voneinander und identisch verteilt.

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i + 3n$$

ist damit der Zeitpunkt, zu dem das $(n+1)$-te Messgerät mit den Messungen beginnt. Damit hat $Z_n - 3 \cdot n$ die Verteilung $\Gamma(n, \lambda)$.

a) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(Z_1 > t)$ für $t > 3$.

b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_{Z_2}(t)$ und eine Dichte $f_{Z_2}(t)$ von Z_2 für $t > 6$. <u>Hinweis:</u> Die $\Gamma(2, \lambda)$-Verteilung hat die Verteilungsfunktion

$$t \to 1 - e^{-\lambda t} \cdot (1 + \lambda t), \; t \geq 0.$$

c) Die Ersetzung einer Messeinrichtung kostet c Euro, ferner fallen pro Zeiteinheit $a > 0$ Euro laufende Kosten an (auch während der Zeit, wenn eine Messeinrichtung ersetzt wird).

c_1) Die (zufälligen) Kosten K_n bis zum Zeitpunkt Z_n sind von der Form

$$K_n = b_n + d_n \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$$

mit geeigneten Konstanten b_n, d_n. Bestimmen Sie b_n und d_n.

c_2) Berechnen Sie $\mathbb{E}K_n$ und $V(K_n)$.

Lösung: $Z_n - 3n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ist die n-fache Faltung der $Exp(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$-verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$. Wegen 11.16 gilt daher

$$Z_n - 3n \sim \Gamma(n, \lambda).$$

a) $\mathbb{P}(Z_1 > t) = \mathbb{P}(X_1 + 3 > t) = \mathbb{P}(X_1 > t - 3) = 1 - (1 - e^{-\lambda(t-3)}) = e^{-\lambda(t-3)}$ für $t > 3$, also $t - 3 > 0$.
b) Wegen a) hat $Y := Z_2 - 6$ die Verteilung $\Gamma(2, \lambda)$. Insbesondere gilt $Y > 0$ und damit

$$F_{Z_2}(t) = \mathbb{P}(Z_2 \leq t) = \mathbb{P}(Y + 6 \leq t) = \mathbb{P}(Y \leq t - 6) = 0$$

für $t \leq 6$. Für $t > 6$ gilt dagegen

$$F_{Z_2}(t) = \mathbb{P}(Y \leq t - 6) = 1 - e^{-\lambda(t-6)} \cdot (1 + \lambda(t - 6)).$$

Diese Verteilungsfunktion ist stetig und bis auf eventuell die Stelle $t = 6$ stetig differenzierbar (ob F_{Z_2} auch an der einzelnen Stelle $t = 6$ differenzierbar ist, muss nicht überprüft werden). Wegen Satz 8.12 ist daher

$$f_{Z_2}(t) = \begin{cases} 0 & , \ t \leq 6 \\ F'_{Z_2}(t) = \lambda e^{-\lambda(t-6)} \cdot (1 + \lambda(t-6)) - \lambda e^{-\lambda(t-6)} = \lambda^2 (t-6) e^{-\lambda(t-6)} & , \ t > 6 \end{cases}$$

eine Dichte von Z_2.
c) Bis zum Zeitpunkt Z_n liegen n Ersetzungen vor, daher sind die Kosten

$$K_n = n \cdot c + a \cdot Z_n = n \cdot (c + 3 \cdot a) + a \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

wobei $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$. Damit gilt c_1) $b_n = n \cdot (c + 3 \cdot a)$ und $d_n = a$.
c_2) Mit den Tabellen auf S. 124 und S. 128 ergibt sich

$$\mathbb{E}K_n = \mathbb{E}\left(n \cdot (c + 3 \cdot a) + a \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n \cdot (c + 3 \cdot a) + a \cdot \mathbb{E} \sum_{i=1}^{n} X_i = n \cdot (c + 3 \cdot a) + a \frac{n}{\lambda}$$

und wegen Satz 12.11 c)

$$V(K_n) = V\left(n \cdot (c + 3 \cdot a) + a \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = V\left(a \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = a^2 \cdot V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{a^2 \cdot n}{\lambda^2}.$$

Aufgabe A5:

Bei $n = 200$ Kontrollen wurde die zufällige Fehlerzahl x_i bei jeweils 30 Vorgängen ermittelt, $i = 1, \ldots, n$. Man nimmt an, dass die zufälligen Zahlen X_i der Fehler stochastisch unabhängig sind mit der Zähldichte

$$f_\vartheta(k) = \binom{30}{k} \cdot \left(\frac{\vartheta}{30}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\vartheta}{30}\right)^{30-k}, \quad k = 0, \ldots, 30,$$

ϑ ein unbekannter Parameter mit $0 < \vartheta < 30$.

a) Welche Verteilung besitzen die zufälligen Zahlen der Fehler X_i, d.h. welche Verteilung hat gerade die Zähldichte f_ϑ ? (Geben Sie auch die Parameter an!)

b) Bestimmen Sie die Loglikelihood-Funktion $M_x(\vartheta)$ zur Stichprobe $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

c) Berechnen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta}(x)$ für ϑ.

d) Insgesamt stellte man

- 40 mal 0 Fehler,
- 67 mal 1 Fehler,
- 60 mal 2 Fehler,
- 22 mal 3 Fehler,
- 9 mal 4 Fehler und
- 2 mal 5 Fehler fest.

Berechnen Sie das Stichprobenmittel $\bar{x}$ und die Stichprobenvarianz s_x^2.

Lösung: a) Es ist $f_\vartheta(k) = \binom{30}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{30-k}$ mit $p := \frac{\vartheta}{30}$ und dies ist gerade die Zähldichte von $Bin(30, p)$. Daher besitzt X_1 die Verteilung $Bin(30, \frac{\vartheta}{30})$.

b) Wir berechnen die Loglikelihood-Funktion $M_x(\vartheta)$. Es gilt $\ln(f_\vartheta(k)) = \ln \binom{30}{k} + k \cdot \ln(\vartheta/30) + (30 - k) \cdot \ln(1 - \vartheta/30)$ und damit

$$M_x(\vartheta) = \sum_{i=1}^{n} \ln(f_\vartheta(x_i)) = \sum_{i=1}^{n} \left[\ln \binom{30}{x_i} + x_i \cdot \ln(\vartheta/30) + (n - x_i) \cdot \ln(1 - \vartheta/30) \right]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \ln \binom{30}{x_i} + \ln(\vartheta/30) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + \ln(1 - \vartheta/30) \cdot \sum_{i=1}^{n} (30 - x_i)$$

c) M_x besitzt die Ableitung

$$M'_x(\vartheta) = \frac{1}{\vartheta} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{30 - \vartheta} \cdot \sum_{i=1}^{n} (30 - x_i) = \frac{n \cdot \bar{x}}{\vartheta} - \frac{n \cdot (30 - \bar{x})}{30 - \vartheta}$$
$$= \frac{n \cdot \bar{x} \cdot (30 - \vartheta) - n \cdot (30 - \bar{x}) \cdot \vartheta}{\vartheta \cdot (30 - \vartheta)} = \frac{n \cdot \bar{x} \cdot 30 - n \cdot 30 \cdot \vartheta}{\vartheta \cdot (30 - \vartheta)} = \frac{30 \cdot n}{\vartheta \cdot (30 - \vartheta)} \cdot (\bar{x} - \vartheta)$$

wobei wir $\sum_{i=1}^{n} x_i = n \cdot \bar{x}$ benützt haben. Hierbei ist $\frac{30 \cdot n}{\vartheta \cdot (30-\vartheta)} > 0$ und damit

$$M_x'(\vartheta) \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} 0 \quad \text{genau dann, wenn} \quad \vartheta \left\{ \begin{array}{c} < \\ = \\ > \end{array} \right\} \bar{x}.$$

Dies bedeutet, dass die Funktion M_x unterhalb von $\hat{\vartheta}(x) = \bar{x}$ steigt und oberhalb von $\hat{\vartheta}(x) = \bar{x}$ fällt. Damit ist $\hat{\vartheta}(x)$ die (einzige) Maximumstelle von M_x und $\hat{\vartheta}(x) = \bar{x}$ der gesuchte Maximum-Likelihood-Schätzer.

d) Zur Berechnung von $\bar{x}$ und s_x^2 kann Satz 1.10 verwendet werden. Alternativ berechnet man direkt $\sum_{i=1}^{200} x_i = 40 \cdot 0 + 67 \cdot 1 + \ldots + 2 \cdot 5 = 299$ und $\sum_{i=1}^{200} x_i^2 = 40 \cdot 0^2 + 67 \cdot 1^2 + \ldots + 2 \cdot 5^2 = 699$ und damit

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{200} \cdot \sum_{i=1}^{200} x_i = \frac{299}{200} = \underline{1.495} \quad \text{und}$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \right] = \frac{1}{199} \left(699 - \frac{299^2}{200} \right) = \underline{1.2663}.$$

Aufgabe A6:

Eine Firma besitzt 16 gleichartige Messgeräte, welche unabhängig voneinander und unter gleichen Bedingungen 2 Jahre lang ohne Wartung eingesetzt wurden. Bei der Überprüfung dieser Messgeräte stellt sich heraus, dass 10 dieser Messgeräte keine korrekten Messergebnisse mehr liefern.

a) Es sei p die unbekannte Wahrscheinlichkeit, dass ein Messgerät auch nach 2 Jahren noch korrekte Messergebnisse liefert. Geben Sie ein Konfidenzintervall für die Wahrscheinlichkeit p zur Konfidenzwahrscheinlichkeit 0.90 an.

   Lösung: Nach Voraussetzung kann wie in Beispiel 18.5 ein ideales Zufallsexperiment mit den zwei möglichen Ergebnissen „Keine korrekten Messergebnisse“ (Treffer) und „Korrekte Messergebnisse“ (Niete) und der Trefferwahrscheinlichkeit $\vartheta := p$ angesehen werden. Nach diesem Beispiel und wegen 18.6 ist mit $n = 16$ und $x = 10$ das gesuchte Konfidenzintervall $[l(x), L(x)]$, wobei die Konfidenzgrenzen $l(x)$ und $L(x)$ für $x = 10$ und $n - x = 6$ und $1 - \alpha = 0.9$ aus Tabelle A.4 entnommen werden. Dies ergibt das Konfidenzintervall

$$\mathcal{C}_1(x) = [0.391 \ , \ 0.822] \ .$$

b) Sie suchen jetzt ein Konfidenzintervall für p zum Konfidenzniveau 0.95. Ist dieses kleiner, gleich oder größer als das zur Konfidenzwahrscheinlichkeit 0.9?

   Lösung: Für das Konfidenzintervall zur Konfidenzwahrscheinlichkeit 0.95 erhält man aus Tabelle A.4

$$\mathcal{C}_2(x) = [0.354 \ , \ 0.848] \ .$$

   Dieses ist größer als $\mathcal{C}_1(x)$. (Dies gilt allgemein: Wird die Konfidenzwahrscheinlichkeit (die Sicherheit) erhöht, so muss auch das Konfidenzintervall größer werden.)