Institut für Stochastik
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Dr. B. Klar

WS 2009/10

Klausur

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik für Studierende des Maschinenbaus

vom 08.02.2010

Musterlösungen

Aufgabe 1

Gegeben sei eine Urliste mit den Paaren $(x_1, y_1), \dots, (x_8, y_8)$

j	1	2	3	4	5	6	7	8
x_j	0.8	1.8	3	3.9	5	5.8	7	8
y_j	3.6	4.6	5	5.3	6.1	6.1	6.6	6.2

a) Berechnen Sie die Stichprobenmittel $\bar{x}$, $\bar{y}$, die Stichproben-Standardabweichungen s_x, s_y und den empirischen Korrelationskoeffizienten r_{xy}.
Lösung: Direkt aus den Daten ergibt sich gemäß Definition 1.8 und Paragraph 1.5 unter Ausnützung der Beziehung

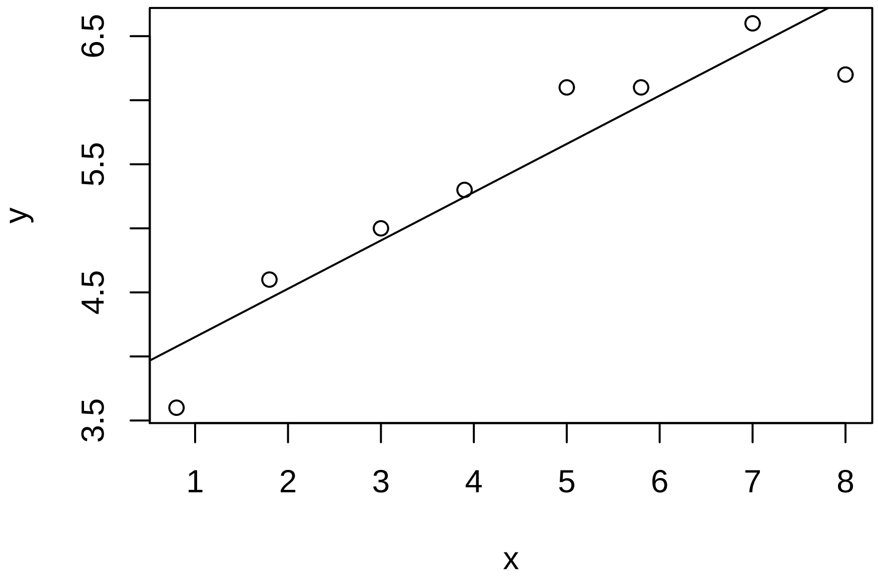
$$\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 4.41 & s_x &= 2.506 \\ \bar{y} &= 5.44 & s_y &= 1.007 \\ r_{xy} &= 0.9377 \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie die zugehörige Regressionsgerade $y = a^* + b^* \cdot x$ von y auf x.
Lösung: Nach Paragraph 1.5 ist $b^* = r_{xy} \cdot \dfrac{s_y}{s_x}$ und $a^* = \bar{y} - b^* \cdot \bar{x}$, also

$$\begin{aligned} b^* &= 0.377 \\ a^* &= 3.77 \end{aligned}$$

und die Regressionsgerade $y = 3.77 + 0.377 \cdot x$.



Punkte und Regressionsgerade $y = a^* + b^* \cdot x$

Für die Lösung der nächsten drei Aufgabenteile benötigen wir die aufsteigend sortierten y-Werte. Es ist

$$y_{()} = (3.6,\ 4.6,\ 5,\ 5.3,\ 6.1,\ 6.1,\ 6.2,\ 6.6)$$

c) Berechnen Sie das 0.15-getrimmte Stichprobenmittel $\bar{y}_{0.15}$ von $(y_1, \ldots, y_8)$.
Lösung: Mit $k = [8 \cdot 0.15] = 1$ ergibt sich

$$\bar{y}_{0.15} = \frac{1}{8 - 2 \cdot 1} \cdot (y_{(2)} + \ldots + y_{(7)}) = 5.55$$

d) Bestimmen Sie das Stichproben-0.3-Quantil $\tilde{y}_{0.3}$ von $(y_1, \ldots, y_8)$.
Lösung: Da $8 \cdot 0.3 = 2.4$ nicht ganzzahlig ist, ist mit $k = [2.4] = 2$

$$\tilde{y}_{0.3} = y_{(k+1)} = y_{(3)} = 5$$

e) Berechnen Sie den Quartilsabstand von $(y_1, \ldots, y_8)$.
Lösung: Da $0.25 \cdot 8 = 2$ und $0.75 \cdot 8 = 6$ beide ganzzahlig sind, ergibt sich mit $k_1 = 2$ und $k_2 = 6$

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{0.25} &= \frac{y_{(k_1)} + y_{(k_1+1)}}{2} = \frac{y_{(2)} + y_{(3)}}{2} = 4.8 \\ \tilde{y}_{0.75} &= \frac{y_{(k_2)} + y_{(k_2+1)}}{2} = \frac{y_{(6)} + y_{(7)}}{2} = 6.15 \end{aligned}$$

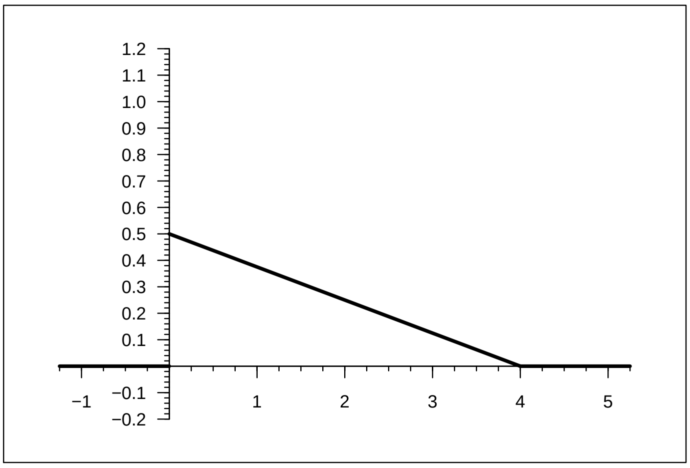
und damit der Quartilsabstand zu $\tilde{y}_{0.75} - \tilde{y}_{0.25} = 1.35$.

Aufgabe 2

Die Dichte f einer stetigen Zufallsvariablen X ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} (4-x)/8, & \text{falls } 0 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das nachstehende Schaubild zeigt f:



a) Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.
Lösung: Es gilt

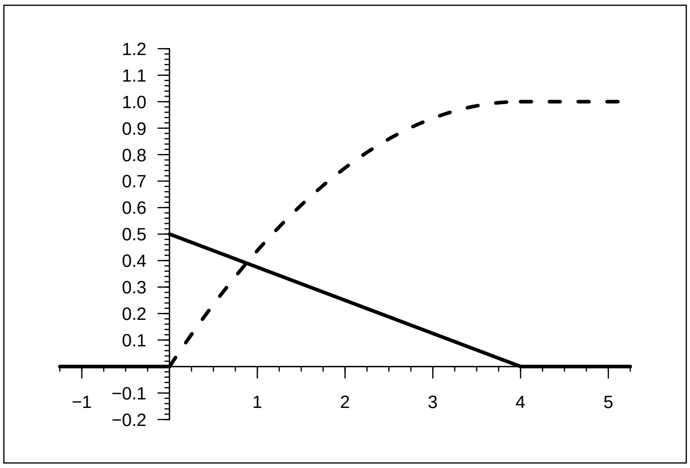
$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_0^4 \left(x/2 - x^2/8\right)\, dx = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{24}\right]_0^4 = \frac{4}{3}.$$

b) Bestimmen Sie das zweite Moment $\mathbb{E}(X^2)$ und die Varianz $V(X)$ von X.
Lösung: Es ist

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx = \int_0^4 \left(x^2/2 - x^3/8\right)\, dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{32}\right]_0^4 = \frac{8}{3},$$
$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{8}{9}.$$

c) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F zur Dichte f, und zeichnen Sie den Graphen von F in das obigen Schaubild ein.
Lösung: Es gilt

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0 \\ \frac{x}{2} - \frac{x^2}{16}, & \text{falls } 0 \leq x \leq 4, \\ 1, & \text{falls } x > 4. \end{cases}$$



d) Bestimmen Sie das 0.75-Quantil von F.
Lösung: Es gilt

$$\frac{x}{2} - \frac{x^2}{16} \overset{!}{=} \frac{3}{4} \Leftrightarrow x^2 - 8 \cdot x + 12 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16 - 12} = 4 \pm 2.$$

Folglich muss das 0.75-Quantil von F gleich 2 sein.

Aufgabe 3

In einer Urne befinden sich 3 rote und 2 schwarze Kugeln. Es werden zunächst 2 Kugeln rein zufällig und ohne Zurücklegen gezogen.

Hinweis: Evtl. ist die Einführung einer Zufallsvariablen X, die die zufällige Anzahl der gezogenen roten Kugeln angibt, hilfreich.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die beiden gezogenen Kugeln rot?
Lösung:

$$\mathbb{P}(\text{beide Kugeln rot}) = \tfrac{3}{5} \cdot \tfrac{2}{4} = \tfrac{3}{10}.$$

Alternativ: Die oben definierte Zufallsvariable X ist $Hyp(2, 3, 2)$-verteilt. Gesucht ist dann

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{2}{0}}{\binom{5}{2}} = \tfrac{3}{10}.$$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben die beiden gezogenen Kugeln dieselbe Farbe?
Lösung:

$$\mathbb{P}(\text{beide Kugeln gleichfarbig}) = \tfrac{3}{10} + \tfrac{2}{5} \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{10} + \tfrac{1}{10} = \tfrac{4}{10}.$$

c) Sind die beiden gezogenen Kugeln gleichfarbig, werden zwei rote Kugeln in die Urne gelegt. Haben die beiden gezogenen Kugeln unterschiedliche Farben, werden zwei schwarze Kugeln in die Urne gelegt. Die Zufallsvariable Z bezeichne die Anzahl der roten Kugeln, die danach in der Urne liegen. Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten, und tragen Sie diese in die Tabelle ein.

$\mathbb{P}(Z = 2)$	$\mathbb{P}(Z = 3)$	$\mathbb{P}(Z = 4)$	$\mathbb{P}(Z = 5)$

Lösung: Die Zufallsvariable Z nimmt die Werte $2, 3, 5$ an: Es gilt $Z = 2$, falls die beiden gezogenen Kugeln unterschiedliche Farben haben, und $Z = 3$ bzw. $Z = 5$, falls die beiden gezogenen Kugeln rot bzw. schwarz sind. Somit gilt

$$\mathbb{P}(Z = 2) = 1 - \frac{4}{10} = \frac{6}{10},\ \mathbb{P}(Z = 3) = \frac{3}{10},\ \mathbb{P}(Z = 4) = 0,\ \mathbb{P}(Z = 5) = \frac{1}{10}.$$

Alternativ: Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = 5) &= \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{10},\\
\mathbb{P}(Z = 3) &= \mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{10},\\
\mathbb{P}(Z = 2) &= \mathbb{P}(X = 1) = 1 - \frac{4}{10} = \frac{6}{10}.
\end{aligned}$$

d) Anschließend wird nach gutem Mischen rein zufällig eine Kugel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Kugel rot ist?
Lösung: Mit dem Satz über die totale Wahrscheinlichkeit erhält man

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{es wird eine rote Kugel gezogen}) =& \mathbb{P}(\text{Kugel rot} \mid Z=2)\cdot\mathbb{P}(Z=2)\\ &+\mathbb{P}(\text{Kugel rot} \mid Z=3)\cdot\mathbb{P}(Z=3)\\ &+\mathbb{P}(\text{Kugel rot} \mid Z=5)\cdot\mathbb{P}(Z=5)\\ =&\frac{2}{5}\cdot\frac{6}{10}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{10}+\frac{5}{5}\cdot\frac{1}{10}\\ =&\frac{12+9+5}{50}=\frac{13}{25}.\end{aligned}$$

e) Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die beiden zuerst gezogenen Kugeln rot sind, unter der Bedingung, dass die zuletzt gezogene Kugel rot ist?
Lösung:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\text{die beiden zuerst gezogenen Kugeln rot}|\text{die zuletzt gezogene Kugel ist rot})\\ &=\mathbb{P}(\text{alle drei gezogenen Kugeln rot})/\mathbb{P}(\text{die zuletzt gezogene Kugel ist rot})\\ &=\frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{13}{25}}=\frac{9}{26}.\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Auf einer Metallhobelmaschine werden ringförmige Platten mit zufälligem Außendurchmesser X und Innendurchmesser Y hergestellt. X mit Normalverteilung $\mathcal{N}(100, 10)$ und Y mit Normalverteilung $\mathcal{N}(60, 6)$ seien stochastisch unabhängig. Falls die Ringbreite $U = \frac{X-Y}{2}$ in das Intervall $[14, 26]$ fällt, so wird die Platte hergestellt, ansonsten wird der Vorgang abgebrochen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass X zwischen 98 und 103 liegt?
Lösung:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(98 \leq X \leq 103) &= \Phi(\frac{103-100}{\sqrt{10}}) - \Phi(\frac{98-100}{\sqrt{10}}) \\
&= \Phi(0.95) - \Phi(-0.63) = \Phi(0.95) + \Phi(0.63) - 1 \\
&= 0.8289 + 0.7357 - 1 = 0.5646.
\end{aligned}$$

b) Geben Sie den Erwartungswert und die Varianz von U an. Welche Verteilung hat U? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Platte hergestellt wird?
Lösung: Es gilt $\mathbb{E}(U) = (100-60)/2 = 20$; wegen der Unabhängigkeit von X und Y gilt weiter $V(U) = (10+6)/4 = 4$. Nach der Faltungsformel ist U $\mathcal{N}(20, 4)$-verteilt, es ist also $\sigma := \sqrt{V(U)} = \sqrt{4} = 2$. Somit folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(14 \leq U \leq 26) &= \mathbb{P}(|U-20| \leq 6) \\
&= \mathbb{P}(|U-20| \leq 3\sigma) \\
&= 2 \cdot \Phi(3) - 1 = 2 \cdot 0.9987 - 1 = 0.9974.
\end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie das 0.90-Quantil von U.
Lösung:

$$\mathbb{P}(U \leq t) = \Phi\left(\frac{t-20}{2}\right) \stackrel{!}{=} 0.90 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{t-20}{2} \stackrel{!}{=} 1.28$$

Also ist $t_{0.90} = 1.28 \cdot 2 + 20 = 22.56$ das 0.90-Quantil von U.

d) Sei $W = \frac{X+Y}{2}$. Welche Verteilung besitzt W?
Lösung: Es gilt $W \sim \mathcal{N}(80, 4)$.

e) Berechnen Sie Kovarianz und Korrelationskoeffizient von U und W.
Lösung:

$$\begin{aligned}
C(U, W) &= C\left(\frac{X-Y}{2}, \frac{X+Y}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4} \cdot [C(X,X) + C(X,Y) - C(Y,X) - C(Y,Y)] \\
&= \frac{1}{4} \cdot (V(X) - V(Y)) = \frac{1}{4} \cdot (10-6) = 1.
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\rho(U, W) = \frac{C(U,W)}{\sqrt{V(U) \cdot V(W)}} = \frac{1}{4}.$$

f) Die zufällige Fläche der ringförmigen Platte ist $F = \pi \cdot U \cdot W = \frac{\pi}{4}(X^2 - Y^2)$. Bestimmen Sie den Erwartungswert von F.

Lösung:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}F &= \mathbb{E}(\pi \cdot U \cdot W) \\ &= \pi \cdot [C(U,W) + \mathbb{E}(U) \cdot \mathbb{E}(W)] \\ &= \pi \cdot (1 + 20 \cdot 80) = 1601\pi. \end{aligned}$$

Alternativ:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}F &= \frac{\pi}{4} \cdot \mathbb{E}\left(X^2 - Y^2\right) \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \mathbb{E}\left(V(X) + \mathbb{E}(X^2) - V(Y) - \mathbb{E}(Y^2)\right) \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot (10 + 10000 - 6 - 3600) = 1601\pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Gegeben sei ein System von 3 parallel geschalteten unabhängigen Komponenten, welches 1 Jahr betrieben wird. Das System fällt genau dann aus, wenn alle 3 Komponenten defekt sind. Eine Komponente kostet 100 Euro.

1. Die Wahrscheinlichkeit, dass zu Beginn Komponente i ($i \in \{1, 2, 3\}$) defekt ist, sei gleich $\frac{1}{2}$. Ist das System zu Beginn funktionsuntüchtig, entsteht ein Schaden von 800 Euro.

   (a) Die (zufälligen) Gesamtkosten K_1, die zu Beginn anfallen, betragen also entweder 300 oder 1100 Euro. Bestimmen Sie $\mathbb{P}(K_1 = 300)$ und $\mathbb{P}(K_1 = 1100)$.
   Lösung: Es gilt

   $$\mathbb{P}(K_1 = 1100) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = \tfrac{1}{8} \text{ und somit } \mathbb{P}(K_1 = 300) = \tfrac{7}{8}.$$

   (b) Berechnen Sie den Erwartungswert von K_1.
   Lösung: Es ist

   $$\mathbb{E}K_1 = 1100 \cdot \tfrac{1}{8} + 300 \cdot \tfrac{7}{8} = 400 \text{ Euro.}$$

2. Nach dem Aufbau und dem Einschalten des Systems seien alle Komponenten intakt. Die Wahrscheinlichkeit, dass die i-te Komponente ($i \in \{1, 2, 3\}$) während der Betriebszeit ausfällt, sei gleich $\frac{1}{4}$. Fällt das System während der Betriebszeit aus, entsteht ein Schaden von 8000 Euro. Nach einem Jahr wird das System abgebaut und intakte Komponenten werden für 20 Euro pro Stück an den Hersteller zurückgegeben.

   (a) Die Zufallsvariable Y sei definiert durch

   $$Y := \begin{cases} 1, & \text{falls das System während der Betriebszeit ausfällt,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Bestimmen Sie $\mathbb{P}(Y = 1)$ und $\mathbb{P}(Y = 0)$.
   Lösung: Es gilt

   $$\mathbb{P}(Y = 1) = \left(\tfrac{1}{4}\right)^3 = \tfrac{1}{64} \text{ und } \mathbb{P}(Y = 0) = \tfrac{63}{64}.$$

   (b) Die Zufallsvariable Z sei die Anzahl der Komponenten, die nach einem Jahr Betriebszeit intakt sind. Geben Sie die Verteilung und den Erwartungswert von Z an.
   Lösung: Es gilt $Z \sim Bin(3, 3/4)$ und somit $\mathbb{E}(Z) = 3 \cdot 3/4 = 9/4$.

   (c) Berechnen Sie den Erwartungswert der durch die Zufallsvariable

   $$K_2 := \begin{cases} 300 - 20 \cdot Z, & \text{falls } Y = 0, \\ 8300 - 20 \cdot Z, & \text{falls } Y = 1 \end{cases}$$

   gegebenen Gesamtkosten (einschließlich Aufbaukosten) für ein Jahr Betriebszeit.
   Lösung: Für die Kosten K_2 gilt

   $$\begin{aligned} \mathbb{E}K_2 &= 300 \cdot \mathbb{P}(Y = 0) + 8300 \cdot \mathbb{P}(Y = 1) - 20 \cdot \mathbb{E}Z \\ &= 300 \cdot \frac{63}{64} + 8300 \cdot \frac{1}{64} - 20 \cdot \frac{9}{4} = 425 - 45 = 380. \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Die zufällige Lebensdauer X eines Produktes besitze die Dichte

$$f_\vartheta(t) = \begin{cases} 2 \cdot \vartheta \cdot t \cdot \exp(-\vartheta \cdot t^2), & t > 0, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

mit einem unbekannten Parameter $\vartheta > 0$.

Hinweis: Es gilt $\mathbb{E}X = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\vartheta}}$ und $V(X) = \frac{4-\pi}{4\vartheta}$.

a) Bestimmen Sie die Likelihood-Funktion $L_x(\vartheta)$ und die Log-Likelihood-Funktion $M_x(\vartheta)$ zur Stichprobe $x = (x_1, \ldots, x_n)$, wobei $x_i > 0$ für $i = 1, \ldots, n$.
Lösung: Die Likelihood-Funktion ist

$$L_x(\vartheta) = \prod_{i=1}^n f_\vartheta(x_i) = (2\vartheta)^n \exp\left(-\vartheta \sum_{i=1}^n x_i^2\right) \cdot \prod_{i=1}^n x_i.$$

Weiter gilt

$$\log(f_\vartheta(t)) = \log\vartheta + \log(2t) - \vartheta t^2, \qquad t > 0$$

somit ergibt sich die Loglikelihood-Funktion zu

$$\begin{aligned} M_x(\vartheta) &= \sum_{i=1}^n \log(f_\vartheta((x_i)) = \sum_{i=1}^n \left(\log\vartheta + \log(2x_i) - \vartheta x_i^2\right) \\ &= n\log\vartheta + \sum_{i=1}^n \log(2x_i) - \vartheta \sum_{i=1}^n x_i^2. \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta}(x)$ für ϑ zur Stichprobe x.
Lösung: Die Ableitung der Loglikelihood-Funktion nach ϑ ist

$$M_x'(\vartheta) = \frac{n}{\vartheta} - \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Damit gilt $M_x'(\vartheta) = 0$ für $\vartheta = n / \sum_{i=1}^n x_i^2$. Da für die zweite Ableitung

$$M_x''(\vartheta) = -\frac{n}{\vartheta^2} < 0$$

gilt, erhält man den Maximum-Likelihood-Schätzer

$$\hat{\vartheta}(x) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

c) Bestimmen Sie den Momentenschätzer $\tilde{\vartheta}(x)$ für ϑ zur Stichprobe $x = (x_1, \ldots, x_n)$.
Lösung: Aus der Gleichung

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\vartheta}} = \mathbb{E}X = \bar{x}$$

ergibt sich

$$\tilde{\vartheta}(x) = \frac{\pi}{4\bar{x}^2}.$$

d) $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängige Zufallsvariablen mit Dichte f_ϑ. Für welche Konstante a ist $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$ ein erwartungstreuer Schätzer für $\gamma(\vartheta) = \frac{a}{\vartheta}$?

Lösung:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i^2 = \mathbb{E}X_1^2 \\ &= V(X_1) + (\mathbb{E}X_1)^2 = \frac{4-\pi}{4\vartheta} + \frac{\pi}{4\vartheta} = \frac{1}{\vartheta}.\end{aligned}$$

Der Schätzer ist also erwartungstreu für $\gamma(\vartheta) = 1/\vartheta$, also $a = 1$.

Aufgabe 7

Ein Stab der Länge 1 wird an einer rein zufällig gewählten Stelle X in zwei Teile zerbrochen; es gilt also $X \sim U(0,1)$. Y sei die (zufällige) Länge des kürzeren Teilstücks.

a) Begründen Sie, dass $\mathbb{P}(Y > t) = 1 - 2t$ für $t \in (0, 1/2)$ und $\mathbb{P}(Y > t) = 0$ für $t \geq 1/2$ gilt.
Lösung: Es gilt $Y = \min(X, 1 - X) \in (0, 1/2)$ und somit

$$\mathbb{P}(Y > t) = \mathbb{P}(X > t, 1 - X > t) = \mathbb{P}(t < X < 1 - t) = 1 - 2t,\ t \in (0, 1/2).$$

Für $t \geq 1/2$ ist $\mathbb{P}(Y > t) = 0$.

b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion und die Dichte von Y. Welche Verteilung hat Y?
Lösung: Die Verteilungsfunktion von Y ist

$$\begin{aligned} &F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = 1 - \mathbb{P}(Y > t) = 2t \text{ für } t \in (0, 1/2), \\ &F_Y(t) = 0 \text{ für } t \leq 0, \quad F_Y(t) = 1 \text{ für } t \geq 1/2. \end{aligned}$$

Die Dichte ist

$$f_Y(t) = F_Y'(t) = 2 \text{ für } t \in (0, 1/2), \quad f_Y(t) = 0 \text{ (sonst)}.$$

Y ist also $U(0, 1/2)$-verteilt.

c) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von Y.
Lösung:

$$\mathbb{E}Y = 1/4, \quad V(Y) = (1/2 - 0)^2/12 = 1/48.$$

d) Betrachten Sie ein Rechteck, dessen Seitenlängen die Längen der beiden Teilstücke des Stabes sind. Berechnen Sie den Erwartungswert der (zufälligen) Fläche A dieses Rechtecks.
Lösung: Es ist $A = X(1 - X)$ und somit

$$\mathbb{E}A = \mathbb{E}X - \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}X - (V(X) + (\mathbb{E}X)^2)) = 1/2 - 1/12 - 1/4 = 1/6.$$

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass A größer als $5/36$ ist.
Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} &A > \frac{5}{36} \iff X(1 - X) > \frac{5}{36} \iff X^2 - X + \frac{5}{36} < 0 \\ \iff &\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{4}{36} < 0 \iff \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{9} \iff \left|X - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\mathbb{P}(A > 5/36) = \mathbb{P}(1/6 < X < 5/6) = 4/6 = 2/3.$$