

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Klausur zum Fach

WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE UND STATISTIK (STOCHASTIK)

für Studierende des Maschinenbaus

Datum: 17. Juli 2013

Dauer: 180 Minuten

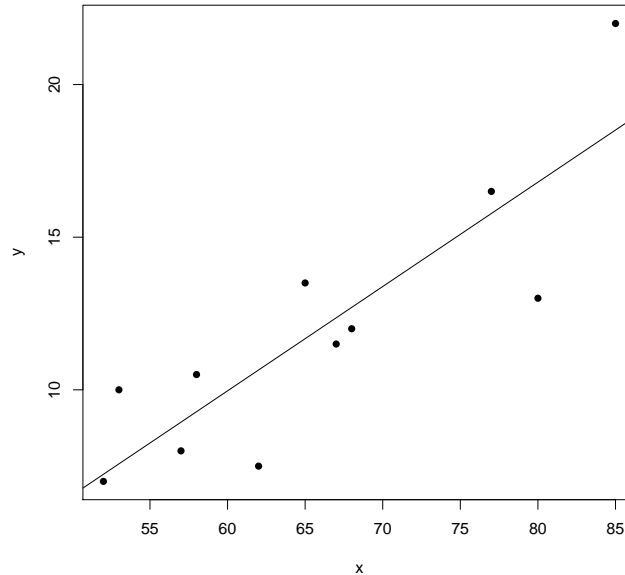
Diese Klausur hat bestanden, wer mindestens 30 Punkte erreicht.

Aufgabe 1 (13 Punkte)

Gegeben sei eine Urliste mit den Paaren $(x_1, y_1), \dots, (x_{11}, y_{11})$

| j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|-------|-----|------|-----|------|-----|------|------|------|------|------|------|
| x_j | 52 | 53 | 57 | 58 | 62 | 65 | 67 | 68 | 77 | 80 | 85 |
| y_j | 7.0 | 10.0 | 8.0 | 10.5 | 7.5 | 13.5 | 11.5 | 12.0 | 16.5 | 13.0 | 22.0 |

und die dazu gehörende Punktwolke:



- a) Berechnen Sie die Stichprobenmittel \bar{x}, \bar{y} , die Stichproben-Standardabweichungen s_x, s_y und den empirischen Korrelationskoeffizienten r_{xy} von $(x_1, y_1), \dots, (x_{11}, y_{11})$.

Hinweis:

$$\sum_{j=1}^{11} x_j = 724, \quad \sum_{j=1}^{11} x_j^2 = 48862, \quad \sum_{j=1}^{11} y_j = 131.5, \quad \sum_{j=1}^{11} y_j^2 = 1763.25, \quad \sum_{j=1}^{11} x_j \cdot y_j = 9068.5.$$

- b) Bestimmen Sie die zugehörige Regressionsgerade $y = a^* + b^* \cdot x$ von y auf x und zeichnen Sie diese in die oben angegebene Punktwolke ein.
- c) Berechnen Sie das 0.2-getrimmte Stichprobenmittel $\bar{x}_{0.2}$ von (x_1, \dots, x_{11}) .
- d) Bestimmen Sie das Stichproben-0.35-Quantil $\tilde{x}_{0.35}$ und den Stichproben Median \tilde{x} von (x_1, \dots, x_{11}) .
- e) Berechnen Sie den Quartilsabstand von (x_1, \dots, x_{11}) .

Lösung:

- a) Direkt aus den Daten ergibt sich gemäß Definition 1.8 und Paragraph 1.5 unter Ausnützung der Beziehung

$$\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y}) = \sum_{j=1}^n x_j \cdot y_j - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 65.81818 & s_x &= 10.99835 \\ \bar{y} &= 11.95455 & s_y &= 4.372954 \\ r_{xy} &= 0.859563\end{aligned}$$

b) Nach Paragraph 1.5 ist $b^* = r_{xy} \cdot \frac{s_y}{s_x}$ und $a^* = \bar{y} - b^* \cdot \bar{x}$, also

$$\begin{aligned}b^* &= 0.3418 \\ a^* &= -10.5397\end{aligned}$$

und die Regressionsgerade $y = -10.5397 + 0.3418 \cdot x$.

c) Da die Werte der Stichprobe x schon sortiert sind, ergibt sich mit $k = [11 \cdot 0.2] = 2$ ergibt sich

$$\bar{x}_{0.2} = \frac{1}{11 - 2 \cdot 2} \cdot (x_{(3)} + \dots + x_{(9)}) = 64.85714$$

d) Da $11 \cdot 0.35 = 3.85$ nicht ganzzahlig ist, ist mit $k = [3.85] = 3$

$$\tilde{x}_{0.35} = x_{(k+1)} = x_{(4)} = 58.$$

Da $n = 11$ ungerade ist, ist der Stichproben-Median gegeben durch

$$\tilde{x} = x_{(6)} = 65.$$

e) Da $0.25 \cdot 11 = 2.75 \notin \mathbb{N}$ und $0.75 \cdot 11 = 8.25 \notin \mathbb{N}$ gilt, ergibt sich mit $k_1 = 2$ und $k_2 = 8$

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{0.25} &= x_{(k_1+1)} = x_{(3)} = 57, \\ \tilde{x}_{0.75} &= x_{(k_2+1)} = x_{(9)} = 77,\end{aligned}$$

und damit der Quartilsabstand zu $\tilde{x}_{0.75} - \tilde{x}_{0.25} = 20$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Ein Kartenspiel, das aus 4 Kreuz-Assen, 4 Pik-Königen und 4 Herz-Damen besteht, wird gut gemischt; danach werden die 12 Karten nacheinander aufgedeckt. Es bezeichne für $i = 1, \dots, 12$ die Ereignisse

$$\begin{aligned} A_i &:= \{\text{„die } i\text{-te aufgedeckte Karte ist ein Ass“}\}, \\ K_i &:= \{\text{„die } i\text{-te aufgedeckte Karte ist ein König“}\}, \\ D_i &:= \{\text{„die } i\text{-te aufgedeckte Karte ist eine Dame“}\}. \end{aligned}$$

- a) Modellieren Sie diese Situation mit einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum.
 b) Stellen Sie das Ereignis

$$B := \{\text{„die 3. aufgedeckte Karte ist die 2. aufgedeckte Dame“}\}$$

mit Hilfe der obigen Ereignisse dar.

- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(A_3)$ und $\mathbb{P}(B)$.
 d) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(K_1|K_{12})$.

Lösung:

- a) Es sei

$$a_j = \begin{cases} 1, & \text{falls ein As gezogen wurde} \\ 2, & \text{falls ein König gezogen wurde} \\ 3, & \text{falls eine Dame gezogen wurde} \end{cases}, \quad j \in \{1, \dots, 12\}.$$

Wir betrachten den Grundraum

$$\Omega := \{(a_1, \dots, a_{12}) \in \{1, 2, 3\}^{12} : a_j = i \text{ für genau 4 verschiedene } j \text{ und } i \in \{1, 2, 3\}\}.$$

Als Wahrscheinlichkeitsmaß nehmen wir die Gleichverteilung.

- b) Für das Ereignis B gilt (beachten Sie, dass genau eine Dame in den ersten beiden Zügen vorgekommen sein muss, aber nicht in den ersten beiden zugleich)

$$B = (D_1 \cap D_3) \cup (D_2 \cap D_3) \setminus (D_1 \cap D_2 \cap D_3).$$

- c) Aus Symmetriegründen muss gelten

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{3}.$$

Weiter gilt

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\binom{2}{1} \binom{1}{1} \binom{9}{2}}{\binom{12}{4}} = \frac{72}{495} = \frac{8}{55}.$$

d) Es gilt aus Symmetriegründen

$$\mathbb{P}(K_{12}) = \frac{1}{3}$$

und

$$\mathbb{P}(K_1 \cap K_{12}) = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{12}{4}} = \frac{1}{11}.$$

Also ist die bedingte Wahrscheinlichkeit gegeben durch

$$\mathbb{P}(K_1|K_{12}) = \frac{3}{11}.$$

Alternative Lösung: Unter der Bedingung, dass die zwölfte Karte ein König ist, gilt direkt

$$\mathbb{P}(K_1|K_{12}) = \frac{3}{11},$$

da im ersten Zug noch drei Karten von elf übrigen ein König sind (reduziere das Kartenspiel um einen König und betrachte die Wahrscheinlichkeit im ersten Zug einen König aufzudecken).

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Es wird n -mal, $n \in \mathbb{N}$, in unabhängiger Folge eine faire Münze mit den Seiten Kopf (K) und Zahl (Z) geworfen. Dabei bezeichnet die Zufallsvariable

$$X_j := \begin{cases} 1, & \text{falls } K \text{ oben liegt,} \\ 0, & \text{falls } Z \text{ oben liegt,} \end{cases}$$

den Ausgang des Experiments nach dem j -ten Wurf, $j = 1, \dots, n$. Die Zufallsvariable

$$S_n := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$$

bezeichne die relative Häufigkeit der K -Würfe nach n Runden.

- Welche Werte kann die Zufallsvariable S_n annehmen? Welche Verteilungen haben die Zufallsvariablen $\sum_{j=1}^n X_j$ und S_n ?
- Bestimmen Sie $\mathbb{E}(S_n)$ und $V(S_n)$.
- Gegen was strebt die Zufallsvariable S_n für $n \rightarrow \infty$? (Begründen Sie Ihre Antwort!)
- Die Münze wird nun sooft geworfen bis zum **dritten** Mal Kopf auftritt. Die Zufallsvariable Y gebe die Anzahl der Versuche bis zu diesem Zeitpunkt an, bei denen Zahl geworfen wurde. Welche Verteilung hat Y ?
- Bestimmen Sie $\mathbb{P}(Y = 5)$ und $\mathbb{P}(Y \geq 2)$.

Lösung:

- Die Zufallsvariable S_n nimmt durch die Mittelung nur Werte zwischen 0 und 1 an. Es gilt $S_n \in \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\} =: W$. Da es sich hier um ein Treffer-Niete-Experiment handelt und die Münze in unabhängigerweise geworfen wird, gilt $X_1 \sim \text{Bin}(1, \frac{1}{2})$ und damit nach dem Additionsgesetz der Binomialverteilung

$$\sum_{j=1}^n X_j \sim \text{Bin}\left(n, \frac{1}{2}\right).$$

Weiter gilt für $k \in W$

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^n X_j = n \cdot k\right) = \binom{n}{n \cdot k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n \cdot k} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n - n \cdot k} = \binom{n}{n \cdot k} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

- Es gilt wegen der Linearität des Erwartungswerts und $\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^n X_j\right) = \frac{n}{2}$

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{n} \cdot \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^n X_j\right) = \frac{1}{2}.$$

Weiter gilt mit der Unabhängigkeit der X_j und $V(X_1) = \frac{1}{4}$

$$V(S_n) = \frac{1}{n^2} \cdot V\left(\sum_{j=1}^n X_j\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n V(X_j) = \frac{1}{4 \cdot n}.$$

- c) Für $n \rightarrow \infty$ strebt S_n gegen $\frac{1}{2}$. Dies gilt wegen dem starken Gesetz großer Zahlen. Alternativ kann man dies auch über die Tschebyschev-Ungleichung schließen.
- d) Die Zufallsvariable Y ist Negativ Binomial verteilt (vgl. Definition 7.16 Skript), also $Y \sim \text{Nb}(3, \frac{1}{2})$.
- e) Es gilt

$$\mathbb{P}(Y = 5) = \binom{3+5-1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^5 = \binom{7}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^8 \approx 0.082.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \geq 2) &= 1 - \mathbb{P}(Y \leq 1) \\ &= 1 - \mathbb{P}(Y = 1) - \mathbb{P}(Y = 0) \\ &= 1 - \binom{3}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \binom{2}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ &= 1 - \frac{3}{16} - \frac{1}{8} = 0.6875. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (9 Punkte)

Die Dauer bis zu einem Defekt eines Werkzeugs im Dauereinsatz (in Monaten) werde auf einem Prüfstand anhand von 6 Werkzeugen untersucht. Es werden also 6 Werkzeuge der Produktionsreihe entnommen und die Dauern X_j , $j = 1, \dots, 6$, bis zum ersten Defekt protokolliert. Nehmen Sie an, dass die Zufallsvariablen X_j stochastisch unabhängig sind und einer Exponentialverteilung $\text{Exp}\left(\frac{1}{5}\right)$ folgen.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert das erste Werkzeug noch nach 5 Monaten?
- Geben Sie die erwartete Dauer $\mathbb{E}(X_1)$ und die Varianz $V(X_1)$ an.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach einem halben Jahr noch mindestens eines der 6 Werkzeuge funktioniert?
- Geben Sie die gemeinsame Dichte $h(x_1, x_2)$ des bivariaten Zufallsvektors (X_1, X_2) an und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(1 \leq X_1 \leq 3, 1 \leq X_2 \leq 2)$.

Lösung:

- a) Es gilt

$$\mathbb{P}(X_1 > 5) = 1 - \mathbb{P}(X_1 \leq 5) = 1 - 1 + e^{-\frac{1}{5} \cdot 5} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

- b) Es gilt mit den Formeln auf S. 121 und S. 125 des Skripts

$$\mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5 \text{ und } V(X_1) = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = 25.$$

- c) Weiter ist mit der Unabhängigkeit und der identischen Verteilung der Zufallsvariablen X_1, \dots, X_6

$$\begin{aligned} P(\max\{X_1, \dots, X_6\} \geq 6) &= 1 - P(\max\{X_1, \dots, X_6\} < 6) \\ &= 1 - P(X_1 < 6, \dots, X_6 < 6) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^6 P(X_i < 6) \\ &= 1 - (P(X_1 < 6))^6 \\ &= 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{5} \cdot 6}\right)^6 \approx 0.8835501. \end{aligned}$$

- d) Wegen der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen X_1 und X_2 gilt für die gemeinsame Dichte und $x_1, x_2 > 0$

$$h(x_1, x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2) = \frac{1}{25} \cdot e^{-\frac{1}{5}(x_1+x_2)},$$

wobei $f(x) = \frac{1}{5} \cdot e^{-\frac{1}{5} \cdot x}$ die Dichte der $\text{Exp}\left(\frac{1}{5}\right)$ ist. Weiter gilt mit der Unabhängigkeit von X_1 und X_2

$$\begin{aligned} P(1 \leq X_1 \leq 3, 1 \leq X_2 \leq 2) &= P(1 \leq X_1 \leq 3) \cdot P(1 \leq X_2 \leq 2) \\ &= \int_1^3 \frac{1}{5} \cdot e^{-\frac{1}{5} \cdot x_1} dx_1 \cdot \int_1^2 \frac{1}{5} \cdot e^{-\frac{1}{5} \cdot x_2} dx_2 \\ &= e^{-1} - e^{-\frac{3}{5}} - e^{-\frac{4}{5}} + e^{-\frac{2}{5}} \approx 0.04005889. \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)

In einem Fertigungsprozess werden Würfel produziert mit der Kantenlänge $Y = 20 + X$ (in mm). Dabei bezeichnet $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ den im Fertigungsprozess entstehenden Fehler.

- Geben Sie die Verteilung von $2 \cdot Y$ und von X^2 an.
- Bestimmen Sie $C(X^2, X)$ und $C(X^3, X)$.
- Geben Sie Erwartungswert und Varianz des Flächeninhalts F einer Seitenfläche des Würfels an.
- Drücken Sie die Verteilungsfunktion des Volumens $V = Y^3$ des Würfels durch die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung Φ aus und berechnen Sie

$$\mathbb{P}(6859 \leq V < 8000).$$

Lösung:

- Es gilt mit den Rechenregeln für normalverteilte Zufallsvariablen

$$2 \cdot Y \sim \mathcal{N}(40, 4) \quad \text{und} \quad X^2 \sim \chi_1^2.$$

- Es gilt für gerades k und ungerades l (damit ist $k + l$ ungerade) mit Beispiel 12.16 a) und der Formel aus Satz 12.23 a) aus dem Skript

$$C(X^k, X^l) = \mathbb{E}(X^{k+l}) - \mathbb{E}(X^k) \cdot \mathbb{E}(X^l) = 0 - 0 = 0.$$

Also gilt im speziellen $C(X^2, X) = 0$. Weiter gilt mit $\sigma^2 = V(X_1) = 1$

$$C(X^3, X) = \mathbb{E}(X^4) - \mathbb{E}(X^3) \cdot \mathbb{E}(X) = 3 \cdot 1 \cdot \sigma^4 - 0 = 3.$$

- Der zufällige Flächeninhalt einer Seitenfläche ist $F = Y^2$. Damit gilt mit $V(Y) = 1$ und $\mathbb{E}(Y) = 20$

$$\mathbb{E}(F) = \mathbb{E}(Y^2) = V(Y) + (\mathbb{E}(Y))^2 = 401.$$

Die Varianz ist mit den Ergebnissen aus Teil b) gegeben durch

$$\begin{aligned} V(F) &= V((X + 20)^2) = V(X^2 + 40X + 400) \\ &= V(X^2 + 40X) = V(X^2) + V(40X) + 2C(X_1^2, 40X_1) \\ &= \mathbb{E}(X^4) - (\mathbb{E}(X^2))^2 + 1600V(X) + 80C(X^2, X) \\ &= 3 - 1 + 1600 + 80 \cdot 0 = 1602. \end{aligned}$$

- Es gilt für $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V \leq t) &= \mathbb{P}(Y^3 \leq t) = \mathbb{P}\left(Y \leq t^{\frac{1}{3}}\right) = \mathbb{P}\left(Y - 20 \leq t^{\frac{1}{3}} - 20\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X \leq t^{\frac{1}{3}} - 20\right) = \Phi\left(t^{\frac{1}{3}} - 20\right). \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(6859 \leq V < 8000) &= \Phi\left(8000^{\frac{1}{3}} - 20\right) - \Phi\left(6859^{\frac{1}{3}} - 20\right) \\ &= \Phi(0) - \Phi(-1) \\ &= \frac{1}{2} - (1 - \Phi(1)) = \Phi(1) - \frac{1}{2} \approx 0.3413. \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (11 Punkte)

Ein Merkmal habe die Dichte

$$t \rightarrow f_{\vartheta}(t) := \begin{cases} \frac{4}{\vartheta} \cdot t^3 \cdot e^{-t^4/\vartheta}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

wobei $\vartheta \in \Theta := (0, \infty)$ ein unbekannter Parameter ist. Der unbekannte Parameter ϑ soll aufgrund einer unabhängigen Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n)$ geschätzt werden, wobei $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$ sind.

a) Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta}(x_1, \dots, x_n)$ für ϑ durch

$$\hat{\vartheta}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^4$$

gegeben ist.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert von $\hat{\vartheta}(X) = \hat{\vartheta}(X_1, \dots, X_n)$.

Hinweis: Nützen Sie aus, dass $Y_j := X_j^4$ die Verteilung $Exp(1/\vartheta)$ besitzt (kein Beweis erforderlich).

c) Ist $\hat{\vartheta}(X_1, \dots, X_n)$ ein erwartungstreuer Schätzer für ϑ ? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

d) Ist $\hat{\vartheta}(X_1, \dots, X_n)$ ein konsistenter Schätzer für ϑ ? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

Lösung:

a) Es ist

$$\log(f_{\vartheta}(t)) = \log(4) - \log(\vartheta) + 3 \cdot \log(t) - \frac{t^4}{\vartheta}, \quad t > 0,$$

also

$$\begin{aligned} M_x(\vartheta) &= \sum_{j=1}^n \log(f_{\vartheta}(x_j)) = \sum_{j=1}^n \left(\log(4) - \log(\vartheta) + 3 \cdot \log(x_j) - \frac{x_j^4}{\vartheta} \right) \\ &= n \log(4) - n \log(\vartheta) + 3 \cdot \sum_{j=1}^n \log(x_j) - \frac{1}{\vartheta} \sum_{j=1}^n x_j^4. \end{aligned}$$

Es gilt

$$M'_x(\vartheta) = -\frac{n}{\vartheta} + \frac{1}{\vartheta^2} \sum_{j=1}^n x_j^4 = -\frac{1}{\vartheta^2} \left(n\vartheta - \sum_{j=1}^n x_j^4 \right) \begin{matrix} > \\ = 0 \\ < \end{matrix}$$

genau dann, wenn (beachte $-\frac{1}{\vartheta^2} < 0$)

$$\begin{matrix} < \\ \vartheta = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^4 =: \hat{\vartheta}(x). \\ > \end{matrix}$$

Daher ist $\hat{\vartheta}(x)$ die einzige Maximumstelle von $\vartheta \rightarrow M_x(\vartheta)$, insbesondere ist

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \hat{\vartheta}(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^4$$

der gesuchte Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ .

b) Es ist

$$\hat{\vartheta}(X) = \hat{\vartheta}(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j,$$

also wegen $\mathbb{E}_\vartheta Y_j = \frac{1}{1/\vartheta} = \vartheta$ (Hinweis)

$$\mathbb{E}_\vartheta \hat{\vartheta}(X) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\vartheta Y_j = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \vartheta = \vartheta.$$

c) Da $\mathbb{E}_\vartheta \hat{\vartheta}(X) = \vartheta \quad \forall \vartheta \in \Theta$, ist T_n ein erwartungstreuer Schätzer für ϑ .

d) Es gilt wegen der Unabhängigkeit der Y_1, \dots, Y_n (Blockungslemma!) und $V_\vartheta(Y_1) = \frac{1}{\vartheta^2}$

$$V_\vartheta(\hat{\vartheta}(X)) = V_\vartheta\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n V_\vartheta(Y_j) = \frac{1}{n} \cdot \vartheta^2.$$

Für $n \rightarrow \infty$ geht $V_\vartheta(\hat{\vartheta}(X)) \rightarrow 0$ und damit folgt aus der Tschebyschev-Ungleichung die Konsistenz des Schätzers.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Bei der Herstellung von Trinkhalmen ist eine Längenabweichung von der Solllänge um höchstens 5mm gestattet. In einer Qualitätskontrolle wurden von einer Maschine in unabhängiger Weise aus der laufenden Produktion 500 Trinkhalme entnommen und die jeweilige Länge überprüft. Dabei stellte sich heraus, dass 43 Trinkhalme die geforderte Längenabweichung nicht einhielten. Es sei $\vartheta \in (0, 1)$ die unbekannte Wahrscheinlichkeit für die Nichteinhaltung der Längenabweichung.

- Geben Sie die Verteilung für die den Daten zugrunde liegenden Zufallsvariablen X_1, \dots, X_{500} an.
- Geben Sie einen geeigneten Schätzer $\hat{\vartheta}$ für ϑ und den für die obige Stichprobe geltenden Schätzwert $\hat{\vartheta}(x)$ an.
- Geben Sie ein approximatives Konfidenzintervall für ϑ zum Konfidenzniveau 0.95 an.
- Die Maschine darf höchstens einen Ausschuss von 5% produzieren. Können Sie aufgrund der Ergebnisse aus Teilaufgabe c) dem Betreiber der Maschine empfehlen, die Maschine neu zu justieren?

Lösung:

- Es handelt sich um ein Treffer-Niete-Experiment. Dabei bezeichnen wir als Treffer, wenn die tolerierte Längenabweichung nicht eingehalten wurde. Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n sind stochastisch unabhängig und identisch verteilt. Es gilt $X_1 \sim \text{Bin}(1, \vartheta)$ mit einem unbekanntem Parameter $\vartheta \in (0, 1)$.
- Ein geeigneter Schätzer für die unbekannte Trefferwahrscheinlichkeit ϑ ist das arithmetische Mittel

$$\hat{\vartheta}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j = \bar{x}_n.$$

Für die vorliegende Stichprobe gilt $\hat{\vartheta}(x_1, \dots, x_n) = \frac{43}{500}$.

- Die Grenzen des approximativen Konfidenzintervalls ist laut Skript Beispiel 18.10 mit dem $1 - \frac{\alpha}{2}$ Quantil der Standardnormalverteilung $h := u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ gegeben durch

$$l_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{\bar{x}_n + \frac{h^2}{2n} - \frac{h}{\sqrt{n}} \sqrt{\bar{x}_n(1 - \bar{x}_n) + \frac{h^2}{4n}}}{1 + \frac{h^2}{n}},$$

$$L_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{\bar{x}_n + \frac{h^2}{2n} + \frac{h}{\sqrt{n}} \sqrt{\bar{x}_n(1 - \bar{x}_n) + \frac{h^2}{4n}}}{1 + \frac{h^2}{n}}.$$

Mit dem Konfidenzniveau 0.95 ($\alpha = 0.05$), $h := u_{0.975} = 1.96$ und $n = 500$ gilt

$$l_{500}(x_1, \dots, x_{500}) = 0.0644728 \quad \text{und} \quad L_{500}(x_1, \dots, x_{500}) = 0.1138404.$$

Also ist das Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.95 für den unbekanntem Parameter ϑ gegeben durch

$$\mathcal{C}_n(x_1, \dots, x_n) = [0.0644728, 0.1138404].$$

- Da $0.05 \notin \mathcal{C}_n(x_1, \dots, x_n)$ liegt, kann aufgrund des Konfidenzintervalls eine Empfehlung für eine Justage der Maschine gegeben werden.