

Klausur (Maschineningenieure)

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
vom 12.9.2005

Musterlösungen

Aufgabe 1:

Gegeben sei eine Urliste mit den Paaren $(x_1, y_1), \dots, (x_{12}, y_{12})$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_j	-1	0.4	1	2	3.5	3.8	5.1	6.3	7.1	7.5	9.6	10.2
y_j	10.1	10.9	8.1	6.7	4.3	3.9	2.4	2.8	0.4	-1.5	-4.3	-4.6

- a) Berechnen Sie die Stichprobenmittel \bar{x} , \bar{y} , die Stichproben-Standardabweichungen s_x , s_y und den empirischen Korrelationskoeffizienten r_{xy} .

Lösung: Direkt aus den Daten ergibt sich gemäß Definition 1.8 und Paragraph 1.5 unter Ausnützung der Beziehung

$$\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y}) = \sum_{j=1}^n x_j \cdot y_j - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$\bar{x} = 4.62$$

$$s_x = 3.627$$

$$\bar{y} = 3.27$$

$$s_y = 5.158$$

$$r_{xy} = -0.9835$$

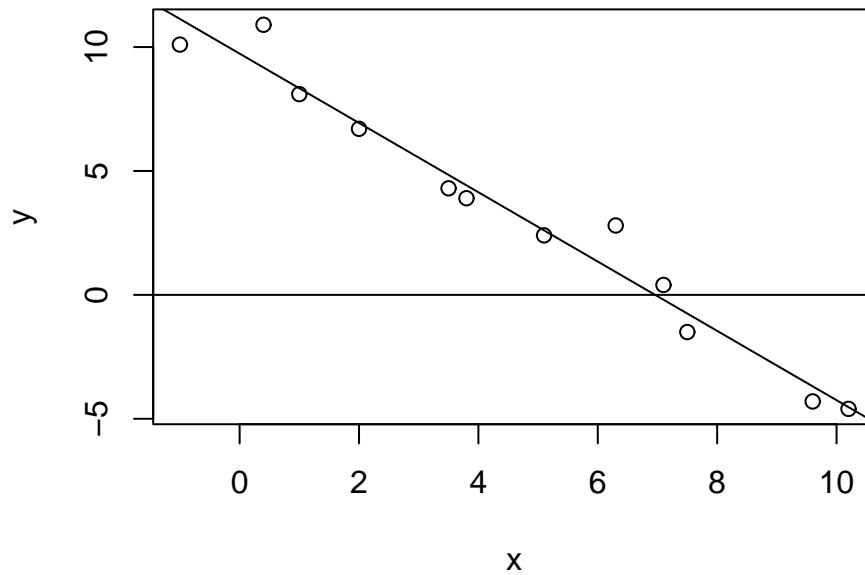
- b) Bestimmen Sie die zugehörige Regressionsgerade $y = a^* + b^* \cdot x$ von y auf x .

Lösung: Nach Paragraph 1.5 ist $b^* = r_{xy} \cdot \frac{s_y}{s_x}$ und $a^* = \bar{y} - b^* \cdot \bar{x}$, also

$$b^* = -1.399$$

$$a^* = 9.73$$

und die Regressionsgerade $y = 9.73 - 1.399 \cdot x$.



Punkte und Regressionsgerade $y = a^* + b^* \cdot x$

Für die Lösung der nächsten drei Aufgabenteile benötigen wir die aufsteigend sortierten y -Werte. Es ist

$$y_{()} = (-4.6, -4.3, -1.5, 0.4, 2.4, 2.8, 3.9, 4.3, 6.7, 8.1, 10.1, 10.9)$$

- c) Bestimmen Sie das Stichproben-0.15-Quantil $\tilde{y}_{0.15}$ von (y_1, \dots, y_{12}) .

Lösung: Da $12 \cdot 0.15 = 1.8$ nicht ganzzahlig ist, ist mit $k = [1.8] = 1$

$$\tilde{y}_{0.15} = y_{(k+1)} = y_{(2)} = -4.3$$

- d) Berechnen Sie den Quartilsabstand von (y_1, \dots, y_{12}) .

Lösung: Da $0.25 \cdot 12 = 3$ und $0.75 \cdot 12 = 9$ beide ganzzahlig sind, ergibt sich mit $k_1 = 3$ und $k_2 = 9$

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{0.25} &= \frac{y_{(k_1)} + y_{(k_1+1)}}{2} = \frac{y_{(3)} + y_{(4)}}{2} = -0.55 \\ \tilde{y}_{0.75} &= \frac{y_{(k_2)} + y_{(k_2+1)}}{2} = \frac{y_{(9)} + y_{(10)}}{2} = 7.4 \end{aligned}$$

und damit der Quartilsabstand zu $\tilde{y}_{0.75} - \tilde{y}_{0.25} = 7.95$.

- e) Berechnen Sie das 0.15-getrimmte Stichprobenmittel $\bar{y}_{0.15}$ von (y_1, \dots, y_{12}) .

Lösung: Mit $k = [12 \cdot 0.15] = 1$ ergibt sich

$$\bar{y}_{0.15} = \frac{1}{12 - 2 \cdot 1} \cdot (y_{(2)} + \dots + y_{(11)}) = 3.29$$

Aufgabe 2

In einem Rohr soll Wasser nur in einer Richtung fließen. Dazu baut man hintereinander in das Rohr zwei Ventile ein, die das Wasser jeweils nur in ein und derselben Richtung durchlassen sollen. Ventil 1 bzw. 2 ist zu einem bestimmten Zeitpunkt im Zustand $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, falls es das

Wasser nur in $\begin{cases} \text{der gewünschten Richtung} \\ \text{beide Richtungen} \\ \text{keiner Richtung} \end{cases}$ durchlässt.

Sei X der zufällige Zustand des ersten, Y der des zweiten Ventils. Es ist also

$$\begin{aligned} A &:= \text{„Die Ventilkombination funktioniert richtig“} \\ &= [X = 0, Y = 0] + [X = 0, Y = 1] + [X = 1, Y = 0]. \end{aligned}$$

- a) Kreuzen Sie an, welche der nachfolgenden Aussagen richtig oder falsch sind. (Falsche Antworten ergeben einen Punkteabzug in dieser Teilaufgabe!)

	richtig	falsch
$A = [X \leq 1, Y \leq 1] - [X = 1, Y = 1]$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$A = [X = 0] \cup [Y = 0]$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$A = [X + Y \leq 1]$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$A = [X = 2, Y = 2]^c$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Es seien X und Y unabhängig mit

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(Y = 0) = 0.9 \text{ und } \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = 0.09.$$

- b) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(Y = 2)$ und $\mathbb{P}(Y = 2 \mid X = 0)$.
- c) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0)$.
- d) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X + Y = 0)$, $\mathbb{P}(X + Y = 1)$ und $\mathbb{P}(X + Y \leq 1)$.
- e) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Ventilkombination nicht richtig funktioniert.

Lösung:

- a) $A = [X \leq 1, Y \leq 1] - [X = 1, Y = 1]$ ist richtig, denn eine Fallunterscheidung ergibt $[X \leq 1, Y \leq 1] = [X = 0, Y = 0] + [X = 0, Y = 1] + [X = 1, Y = 0] + [X = 1, Y = 1]$.

$A = [X = 0] \cup [Y = 0]$ kann nicht richtig sein, denn eine Fallunterscheidung ergibt z.B. $[X = 0] = [X = 0, Y = 0] + [X = 0, Y = 1] + [X = 0, Y = 2]$ und $X = 0, Y = 2$ ist nicht mit A verträglich.

Für die dritte Teilaufgabe überlegt man sich, wann genau $X + Y \leq 1$ möglich ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $X \leq 1$ und $Y \leq 1$ gilt, aber wenn nicht gleichzeitig $X \leq 1$ und $Y \leq 1$ gilt. Wegen a) ist die Aussage also richtig.

$A = [X = 2, Y = 2]^c$ kann nicht richtig sein. So ist z.B. $[X = 0, Y = 2] \subset [X = 2, Y = 2]^c$, was mit A nicht verträglich ist.

- b) Da Y nur die Werte 0, 1 und 2 annimmt, gilt

$$\mathbb{P}(Y = 2) = 1 - \mathbb{P}(Y \neq 2) = 1 - \mathbb{P}(Y = 0) - \mathbb{P}(Y = 1) = 0.01$$

Da ferner X und Y stochastisch unabhängig sind, gilt

$$\mathbb{P}(Y = 2 \mid X = 0) = \mathbb{P}(Y = 2) = 0.01.$$

- c) Wegen der Unabhängigkeit von X und Y gilt

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0) \cdot \mathbb{P}(Y = 0) = 0.9 \cdot 0.9 = 0.81.$$

- d) $X + Y = 0$ gilt genau dann, wenn $X = 0$ und $Y = 0$, daher $\mathbb{P}(X + Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) \stackrel{c)}{=} 0.81$. Fallunterscheidung und Unabhängigkeit von X und Y ergibt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X + Y = 1) &= \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) \\ &= \mathbb{P}(X = 0) \cdot \mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1) \cdot \mathbb{P}(Y = 0) = 2 \cdot 0.9 \cdot 0.09 = 0.162 \end{aligned}$$

und damit

$$\mathbb{P}(X + Y \leq 1) = \mathbb{P}(X + Y = 0) + \mathbb{P}(X + Y = 1) = 0.972$$

- e) Gesucht ist $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1) = 0.028$.

Aufgabe 3

Ein Transformator Kern habe die zufällige Dicke X (in mm) und eine Spule den zufällige Innendurchmesser Y . X und Y seien stochastisch unabhängige Zufallsvariable mit den Normalverteilungen $\mathcal{N}(22, 0.18)$ bzw. $\mathcal{N}(23, 0.07)$.

- a) Welche Verteilung besitzt $Z := Y - X$?
- b) Berechnen Sie die Kovarianz $C(Z, Y)$ und den Korrelationskoeffizienten $\rho(Z, Y)$ von Z und Y .
- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Z > 0)$, dass ein zufällig ausgewählter Kern in eine zufällig ausgewählte Spule passt.
- d) Bestimmen Sie $t \in \mathbb{R}$ so, dass $\mathbb{P}(X > t) = 0.025$ gilt.

Lösung:

- a) Es gilt $Z = Y + (-X)$. Wegen Satz 9.7 gilt $-X \sim \mathcal{N}(-22, 0.18)$, also nach der Faltingsformel

$$Z \sim \mathcal{N}(23 - 22, 0.07 + 0.18) = \mathcal{N}(1, 0.25)$$

(Die Varianzen dürfen hier **nicht** subtrahiert werden!)

b) Anwenden von Satz 12.23 ergibt

$$C(Z, Y) = C(Y + (-X), Y) = C(Y, Y) + C(-X, Y) = V(Y) + 0 = 0.07,$$

da $-X$ und Y stochastisch unabhängig sind. Damit ergibt sich der Korrelationskoeffizient zu

$$\rho(Z, Y) = \frac{C(Z, Y)}{\sqrt{V(Z) \cdot V(Y)}} = \frac{0.07}{\sqrt{0.25 \cdot 0.07}} = 0.52915$$

c) Wegen Satz 9.6 und (9.5) gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z > 0) &= 1 - \mathbb{P}(Z \leq 0) = 1 - \Phi_{1,0.25}(0) = 1 - \Phi\left(\frac{0-1}{0.5}\right) \\ &= 1 - \Phi(-2) = \Phi(2) = 0.9772 \end{aligned}$$

d) Die Gleichung

$$0.025 = \mathbb{P}(X > t) = 1 - \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - \Phi_{22,0.18}(t) = 1 - \Phi\left(\frac{t-22}{\sqrt{0.18}}\right)$$

ist nach t aufzulösen, also

$$\Phi\left(\frac{t-22}{\sqrt{0.18}}\right) = 1 - 0.025 = 0.975$$

Da $\Phi(1.96) = 0.975$ gilt, muss also

$$\frac{t-22}{\sqrt{0.18}} = 1.96$$

gelten, also $t = 1.96 \cdot \sqrt{0.18} + 22 = 22.8316$

Aufgabe 4

Eine Zufallsvariable X habe die Verteilung $Exp(\lambda)$ mit dem Parameter $\lambda > 0$ und es sei $Y = \frac{X}{1+X}$ mit festem Parameter $\lambda > 0$.

a) Bestimmen Sie den Median von X für den Spezialfall $\lambda = \ln(2)$.

b) Skizzieren Sie die Funktion $x \rightarrow \frac{x}{1+x}$ für $0 \leq x \leq 10$. Welche Werte nimmt also die Zufallsvariable Y an?

c) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E} \frac{Y^2}{(1-Y)^2}$.

Hinweis: $\frac{Y^2}{(1-Y)^2}$ ist eine einfache Funktion der Zufallsvariablen X .

d) Berechnen Sie $\mathbb{P}(Y \leq t)$ für $0 < t < 1$ und begründen Sie, dass Y die Verteilungsfunktion

$$t \rightarrow F_Y(t) := \begin{cases} 0 & , t \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{\lambda t}{1-t}} & , 0 < t < 1 \\ 1 & , t \geq 1 \end{cases}$$

besitzt.

e) Bestimmen Sie die Dichte f_Y von Y .

Lösung:

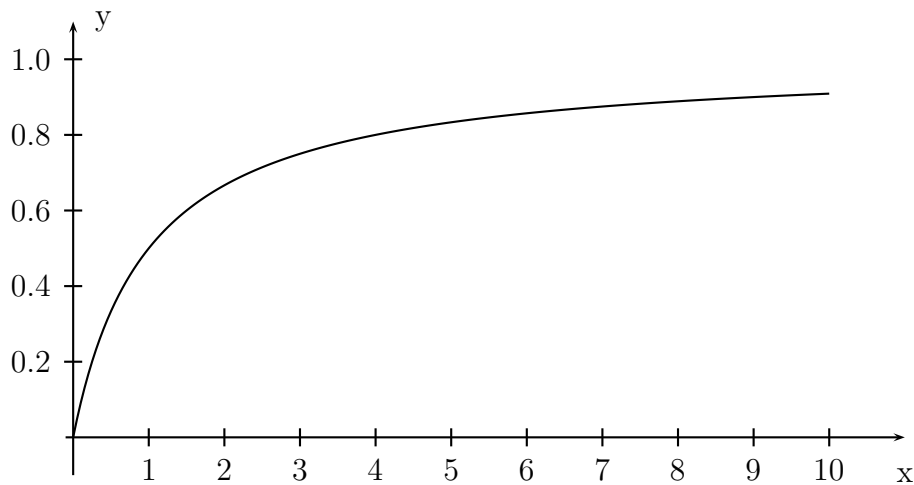
a) Nach Beispiel 12.21 besitzt die Zufallsvariable X allgemein das p -Quantil

$$t_p = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1 - p).$$

Für den Median ist $p = 1/2$. Speziell für $\lambda = \ln(2)$ ergibt sich

$$t_{1/2} = -\frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln(1 - 1/2) = -\frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln(1/2) = 1.$$

b) Direkt aus der nachfolgenden Figur folgt, dass Y alle Werte zwischen 0 und 1 annimmt.



c) Es gilt $\frac{Y^2}{(1 - Y)^2} = \frac{(\frac{X}{1+X})^2}{(1 - \frac{X}{1+X})^2} = \frac{\frac{X^2}{(1+X)^2}}{\frac{1}{(1+X)^2}} = X^2$. Da X die Verteilung $Exp(\lambda)$ besitzt, folgt aus Beispiel 12.16 a) (mit $\alpha = 1$ und $\beta = \lambda$)

$$\mathbb{E} \frac{Y^2}{(1 - Y)^2} = \mathbb{E} X^2 = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Alternativ erhalte man das Resultat auch mit $\mathbb{E} X^2 = V(X) + (\mathbb{E} X)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$.

d) Da Y Werte zwischen 0 und 1 annimmt, gilt $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = 0$ für $t \leq 0$ und $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(Y \leq 1) = 1$ für $t \geq 1$. Für $0 < t < 1$ gilt schließlich

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}\left(\frac{X}{1+X} \leq t\right) = \mathbb{P}(X \leq t \cdot (1 + X)) = \mathbb{P}(X - t \cdot X \leq t) \\ &= \mathbb{P}((1 - t) \cdot X \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t}{1-t}\right) = 1 - e^{-\lambda \cdot \frac{t}{1-t}}, \end{aligned}$$

da X die Verteilungsfunktion $x \rightarrow 1 - e^{-\lambda \cdot x}$, $x > 0$ besitzt.

- e) Nach dem Hinweis ist die Verteilungsfunktion F_Y stetig. Aus d) folgt, dass F_Y bis auf eventuell die Stellen 0 und 1 auch stetig differenzierbar ist, so dass Satz 8.12 anwendbar ist. Da $F_Y(t)$ für $t \leq 0$ und auch für $t \geq 1$ konstant ist, folgt $f_Y(y) = 0$ für $y \leq 0$ und für $y \geq 1$. Für $0 < y < 1$ folgt schließlich mit der Kettenregel

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \lambda \cdot \left(\frac{y}{1-y} \right)' \cdot e^{-\lambda \cdot \frac{y}{1-y}} = \frac{\lambda}{(1-y)^2} \cdot e^{-\lambda \cdot \frac{y}{1-y}}.$$

Aufgabe 5

Ein Merkmal besitze die Weibull-Verteilung $W_{\vartheta, \beta}$. Es besitzt also die Dichte

$$f_{\vartheta}(x) := \begin{cases} \vartheta \cdot \beta \cdot x^{\beta-1} \cdot e^{-\vartheta \cdot x^{\beta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

mit einem bekannten Parameter $\beta > 0$ und einem unbekanntem Parameter $\vartheta > 0$. Beobachtet sei die feste Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n)$ mit $x_i > 0$ für $i = 1, \dots, n$.

- a) Bestimmen Sie die Loglikelihood-Funktion zu x .
 b) Zeigen Sie, dass

$$x \rightarrow \hat{\vartheta}(x) = \hat{\vartheta}(x_1, \dots, x_n) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^{\beta}}$$

ein Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ zur Stichprobe x ist.

- c) Bekannt ist, dass für eine Zufallsvariable Y mit Weibull-Verteilung $W_{\vartheta, \beta}$ die Zufallsvariable Y^{β} die Verteilung $Exp(\vartheta)$ besitzt (kein Beweis erforderlich).
 Seien X_1, \dots, X_n die stochastisch unabhängigen Stichprobenvariablen. Welche Verteilung besitzt $Z := \sum_{i=1}^n X_i^{\beta}$?
 d) Sei $n \geq 2$. Bestimmen Sie die Konstante $c > 0$ so, dass $x \rightarrow c \cdot \hat{\vartheta}(x)$ ein erwartungstreuer Schätzer für ϑ ist.
Hinweis: Hat eine Zufallsvariable Y die Verteilung $\Gamma(n, \alpha)$ mit $\alpha > 0$ und $n \geq 2$ beliebig, so gilt $\mathbb{E} \frac{1}{Y} = \frac{\alpha}{n-1}$.

Lösung:

- a) Wegen $\ln(f_{\vartheta}(x)) = \ln(\vartheta) + \ln(\beta) + (\beta-1) \cdot \ln(x) - \vartheta \cdot x^{\beta}$ gilt für die Loglikelihood-Funktion

$$\begin{aligned} M_x(\vartheta) &= \sum_{i=1}^n \ln(f_{\vartheta}(x_i)) = (\ln(\vartheta) + \ln(\beta) + (\beta-1) \cdot \ln(x_1) - \vartheta \cdot x_1^{\beta}) \\ &\quad + \dots + (\ln(\vartheta) + \ln(\beta) + (\beta-1) \cdot \ln(x_n) - \vartheta \cdot x_n^{\beta}) \\ &= n \cdot \ln(\vartheta) + n \cdot \ln(\beta) + (\beta-1) \cdot \sum_{i=1}^n \ln(x_i) - \vartheta \cdot \sum_{i=1}^n x_i^{\beta} \end{aligned}$$

- b) Zu bestimmen ist eine Maximumstelle von $\vartheta \rightarrow M_x(\vartheta)$. Wir gehen wie auf S. 164 im Skriptum vor und bestimmen die Ableitung $M'_x(\vartheta)$. Wegen a) gilt

$$M'_x(\vartheta) = \frac{n}{\vartheta} - \sum_{i=1}^n x_i^\beta$$

$$M''_x(\vartheta) = -\frac{n}{\vartheta^2} < 0$$

Auflösen von $M'_x(\vartheta) = 0$ nach ϑ liefert die Lösung $\hat{\vartheta}(x) = n / \sum_{i=1}^n x_i^\beta$. Da die zweite Ableitung von $M_x(\vartheta)$ negativ ist, ist $\hat{\vartheta}(x)$ tatsächlich die gesuchte Maximumstelle und damit der Maximum-Likelihood-Schätzer.

- c) Nach Voraussetzung besitzen die Stichprobenvariablen die Verteilung $W_{\vartheta,\beta}$, daher gilt $X_i^\beta \sim \text{Exp}(\vartheta) = \Gamma(1, \vartheta)$. Da die Zufallsvariablen X_i^β stochastisch unabhängig sind, gilt nach der Faltungsformel 11.16

$$Z = X_1^\beta + \dots + X_n^\beta \sim \Gamma(n, \vartheta).$$

- d) $x \rightarrow c \cdot \hat{\vartheta}(x)$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für ϑ , falls für alle $\vartheta > 0$

$$\mathbb{E}_\vartheta(c \cdot \hat{\vartheta}(X_1, \dots, X_n)) = \vartheta$$

gilt, also wegen c) und des Hinweises

$$\vartheta = \mathbb{E}_\vartheta \left(c \cdot \frac{n}{X_1^\beta + \dots + X_n^\beta} \right) = \mathbb{E}_\vartheta \frac{c \cdot n}{Z} = c \cdot n \cdot \mathbb{E} \frac{1}{Z} = c \cdot n \cdot \frac{\vartheta}{n-1}.$$

Dies ist für alle $\vartheta > 0$ erfüllt, falls $c = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ gilt.

Aufgabe 6

In einem Produktionsprozess müssen Bauteile $W = Z \cdot X$ Zeiteinheiten warten, bevor mit der Bearbeitung der zufälligen Dauer B begonnen wird. Hierbei sind B, X und Z stochastisch unabhängige Zufallsvariable. $B > 0$ hat die Verteilung $\text{Exp}(0.2)$, $X > 0$ die Verteilung $\text{Exp}(0.5)$ und Z die Verteilung $\text{Bin}(1, 0.5)$. Z nimmt also nur die Werte 0 und 1 jeweils mit Wahrscheinlichkeit 0.5 an.

- a) Wann genau nimmt W den Wert 0 an? Wie groß ist also $\mathbb{P}(W = 0)$?
- b) Besitzt W eine Dichte? (Begründen Sie Ihre Antwort!)
- c) Bestimmen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von W .
Hinweis: Begründen Sie zuerst, dass $\mathbb{P}(W \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t) \cdot \mathbb{P}(Z = 1) + \mathbb{P}(Z = 0)$ für beliebiges $t \geq 0$ gilt.
- d) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}W$ und $\mathbb{E}W^2$.
- e) Bestimmen Sie die Varianz $V(W)$ von W .
- f) $S = W + B$ ist die Verweildauer (im Produktionsprozess) eines Bauteils. Berechnen Sie $\mathbb{E}S$ und $V(S)$.

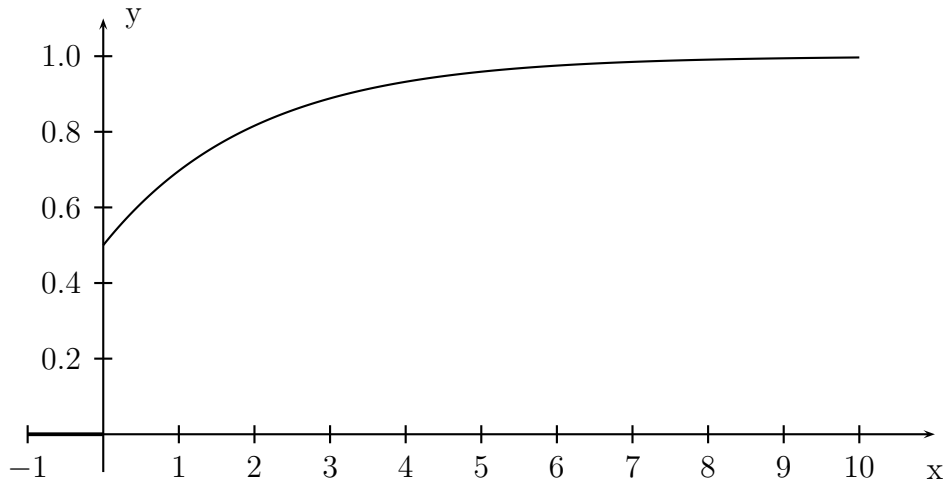
Lösung:

- a) Z nimmt die Werte 0 und 1 an, während $X > 0$ gilt. Daher gilt $W = Z \cdot X = 0$ genau dann, wenn $Z = 0$ ist. Daher gilt auch $\mathbb{P}(W = 0) = \mathbb{P}(Z = 0) = 0.5$.
- b) Besäße W eine Dichte, so müsste $\mathbb{P}(W = t) = 0$ für alle t gelten, insbesondere auch $\mathbb{P}(W = 0) = 0$. Dies ist falsch wegen a).
- c) Wegen $W \geq 0$ gilt $F_W(t) = \mathbb{P}(W \leq t) = 0$ für $t < 0$ (dies gilt automatisch für jede nicht negative Zufallsvariable). Sei $t \geq 0$. Wegen $W \leq t$ genau dann, wenn $Z = 0$ oder wenn $Z = 1$ und $X \leq t$, gilt

$$\{W \leq t\} = \{Z = 0\} + \{Z = 1, X \leq t\}$$

und wegen der Unabhängigkeit von Z und X

$$\begin{aligned} F_W(t) &= \mathbb{P}(W \leq t) = \mathbb{P}(Z = 0) + \mathbb{P}(Z = 1, X \leq t) \\ &= \mathbb{P}(Z = 0) + \mathbb{P}(Z = 1) \cdot \mathbb{P}(X \leq t) = 0.5 + 0.5 \cdot (1 - e^{-0.5 \cdot t}) \\ &= 1 - 0.5 \cdot e^{-0.5 \cdot t}. \end{aligned}$$



- d) Wegen der Unabhängigkeit von Z und X gilt

$$\mathbb{E}W = \mathbb{E}(Z \cdot X) = \mathbb{E}Z \cdot \mathbb{E}X = 0.5 \cdot \frac{1}{0.5} = 1$$

und wegen $Z^2 = Z$

$$\mathbb{E}W^2 = \mathbb{E}(Z^2 \cdot X^2) = \mathbb{E}Z \cdot \mathbb{E}X^2 = 0.5 \cdot \frac{2}{0.5^2} = 4.$$

- e) Direkt aus d) folgt $V(W) = \mathbb{E}W^2 - (\mathbb{E}W)^2 = 4 - 1^2 = 3$.

- f) Wegen der Unabhängigkeit von X, Z und B und damit auch von W und B gilt

$$\mathbb{E}S = \mathbb{E}(W + B) = \mathbb{E}W + \mathbb{E}B = 1 + \frac{1}{0.2} = 6$$

und

$$V(S) = V(W + B) = V(W) + V(B) = 3 + \frac{1}{0.2^2} = 28.$$

Aufgabe 7

Zwei Firmen erhalten Lieferungen gleichartiger Messinstrumente, von denen viele wegen Messfehlern noch nachjustiert werden müssen. Angenommen sei, dass sich die Messinstrumente nicht gegenseitig beeinflussen.

- a) Von den $n = 18$ an die erste Firma gelieferten Messinstrumenten mussten 12 nachjustiert werden. Geben Sie ein zweiseitiges Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.95 für die Wahrscheinlichkeit p an, dass ein Messinstrument nachjustiert werden muss.
- b) Die zweite Firma erhält eine Lieferung von $N = 1000$ Messinstrumenten eines anderen Typs. Von den gelieferten Instrumenten werden 160 überprüft; dabei stellt sich heraus, dass 120 der überprüften Instrumente nachjustiert werden müssen. Bestimmen Sie ein zweiseitiges Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.95 für den Anteil der Instrumente in der gesamten Lieferung, die nachjustiert werden müssen.

Lösung:

- a) Nach Voraussetzung kann wie in Beispiel 18.5 ein ideales Zufallsexperiment mit den zwei möglichen Ergebnissen „Es muss nachjustiert werden“ (Treffer) und „Es muss nicht nachjustiert werden“ (Niete) und der Trefferwahrscheinlichkeit $\vartheta := p$ angesehen werden. Nach diesem Beispiel und wegen 18.6 ist das gesuchte Konfidenzintervall $[l(x), L(x)]$, wobei die Konfidenzgrenzen $l(x)$ und $L(x)$ für $x = 12$ und $n - x = 6$ und $1 - \alpha = 0.95$ Tabelle A.4 entnommen werden. Dies ergibt das Konfidenzintervall

$$\mathcal{C}(x) = [0.410, 0.867] .$$

- b) Hier ist Beispiel 18.12 (Anteils-Schätzung bei endlicher Population) anwendbar. In der Lieferung sind $N = 1000$ Geräte, von denen r (r unbekannt) nachjustiert werden müssen. Es ist dann $T_n = 120/160 = 0.75$ der relative Anteil der Instrumente in der zufälligen Stichprobe vom Umfang $n = 160$, die nachjustiert werden müssen. Mit $\vartheta := r/N$ (= unbekannter Anteil der nachzuzustierenden Instrumente), $h := u_{1-\alpha/2} = 1.9600$ und dem Endlichkeitskorrektur-Faktor $\gamma := 1 - \frac{n-1}{N-1} = 0.8408$ bilden dann

$$\frac{T_n + \frac{h^2}{2n}\gamma \pm \frac{h}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{T_n(1-T_n)\gamma + \frac{h^2}{4n}\gamma^2}}{1 + \frac{h^2}{n}\gamma}$$

den oberen bzw. unteren Endpunkt eines approximativen $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervalles für ϑ ($= \frac{r}{N}$).

Setzt man die Werte ein, so ergibt sich für den unbekanntem Anteil r/N das Konfidenzintervall

$$\mathcal{C}(x) = [0.6839, 0.8062] .$$