

Klausur (Maschineningenieure)
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
vom 18.9.2006
Musterlösungen

Aufgabe 1:

Gegeben sei eine Urliste mit den Paaren $(x_1, y_1), \dots, (x_{12}, y_{12})$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_j	-2.6	-2	-0.9	0.1	1.3	2.3	3.2	4.1	4.8	5.8	6.9	7.8
y_j	9.2	8.3	9.8	10.4	6.6	3.8	3.7	3	0	-1.9	1.2	-6.9

- a) Berechnen Sie die Stichprobenmittel \bar{x} , \bar{y} , die Stichproben-Standardabweichungen s_x , s_y und den empirischen Korrelationskoeffizienten r_{xy} .

Lösung: Direkt aus den Daten ergibt sich gemäß Definition 1.8 und Paragraph 1.5 unter Ausnützung der Beziehung

$$\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y}) = \sum_{j=1}^n x_j \cdot y_j - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}$$

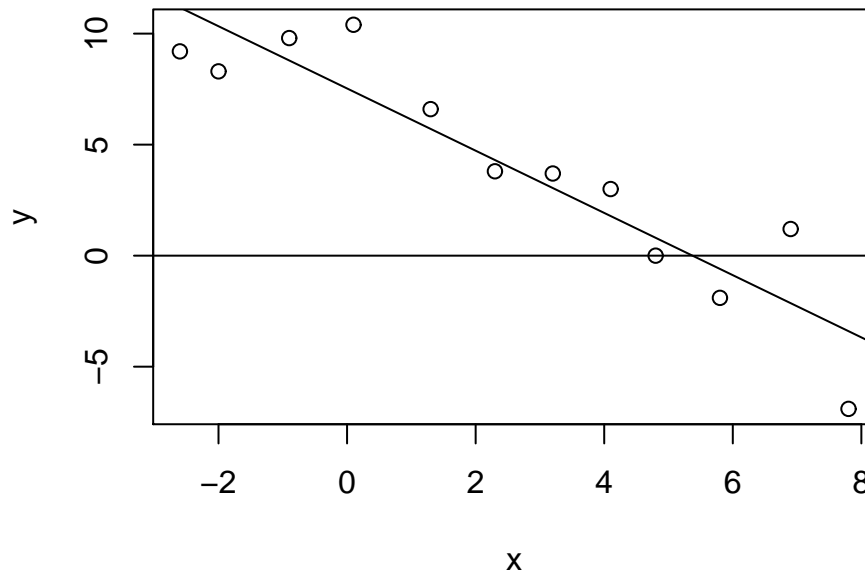
$$\begin{aligned} \bar{x} &= 2.57 & s_x &= 3.46 \\ \bar{y} &= 3.93 & s_y &= 5.269 \\ r_{xy} &= -0.9202 \end{aligned}$$

- b) Bestimmen Sie die zugehörige Regressionsgerade $y = a^* + b^* \cdot x$ von y auf x .

Lösung: Nach Paragraph 1.5 ist $b^* = r_{xy} \cdot \frac{s_y}{s_x}$ und $a^* = \bar{y} - b^* \cdot \bar{x}$, also

$$\begin{aligned} b^* &= -1.401 \\ a^* &= 7.53 \end{aligned}$$

und die Regressionsgerade $y = 7.53 - 1.401 \cdot x$.



Punkte und Regressionsgerade $y = a^* + b^* \cdot x$

Für die Lösung der nächsten drei Aufgabenteile benötigen wir die aufsteigend sortierten y -Werte. Es ist

$$y_{()} = (-6.9, -1.9, 0, 1.2, 3, 3.7, 3.8, 6.6, 8.3, 9.2, 9.8, 10.4)$$

- c) Berechnen Sie das 0.2-getrimmte Stichprobenmittel $\bar{y}_{0.2}$ von (y_1, \dots, y_{12}) .
Lösung: Mit $k = \lceil 12 \cdot 0.2 \rceil = 2$ ergibt sich

$$\bar{y}_{0.2} = \frac{1}{12 - 2 \cdot 2} \cdot (y_{(3)} + \dots + y_{(10)}) = 4.475$$

- d) Bestimmen Sie das Stichproben-0.2-Quantil $\tilde{y}_{0.2}$ von (y_1, \dots, y_{12}) .
Lösung: Da $12 \cdot 0.2 = 2.4$ nicht ganzzahlig ist, ist mit $k = \lceil 2.4 \rceil = 3$

$$\tilde{y}_{0.2} = y_{(k+1)} = y_{(3)} = 0$$

- e) Berechnen Sie den Quartilsabstand von (y_1, \dots, y_{12}) .
Lösung: Da $0.25 \cdot 12 = 3$ und $0.75 \cdot 12 = 9$ beide ganzzahlig sind, ergibt sich mit $k_1 = 3$ und $k_2 = 9$

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{0.25} &= \frac{y_{(k_1)} + y_{(k_1+1)}}{2} = \frac{y_{(3)} + y_{(4)}}{2} = 0.6 \\ \tilde{y}_{0.75} &= \frac{y_{(k_2)} + y_{(k_2+1)}}{2} = \frac{y_{(9)} + y_{(10)}}{2} = 8.75 \end{aligned}$$

und damit der Quartilsabstand zu $\tilde{y}_{0.75} - \tilde{y}_{0.25} = 8.15$.

Aufgabe 2

Es sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und der Varianz 4, die Zufallsvariable Y sei normalverteilt mit Erwartungswert 5 und der Varianz 1. X und Y seien stochastisch unabhängig.

- Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen $Z := \frac{X}{2} + 1$ und die Verteilung der Zufallsvariablen $W := 3 - Y$.
- Sind die Zufallsvariablen $U := 2\pi \cdot \frac{X}{e^{-X^2}}$ und $V := Y^3 \cdot \sin(Y)$ stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Welche Verteilung besitzt die Zufallsvariable $\frac{X}{2} + 1 - Y$?
- Bestimmen Sie $\mathbb{P}(Y \leq 7)$.
- Bestimmen Sie das 0.975-Quantil der Zufallsvariablen Z .

Lösung:

- Nach Satz 9.7 besitzt $Z = \frac{1}{2} \cdot X + 1$ die Verteilung $\mathcal{N}(1, \frac{1}{2^2} \cdot 4) = \mathcal{N}(1, 1)$ und $W = 3 - Y = (-Y) + 3$ die Verteilung $\mathcal{N}(3 - 5, (-1)^2 \cdot 1) = \mathcal{N}(-2, 1)$.
- Als Funktionen der unabhängigen Zufallsvariablen X und Y sind nach dem Blockungslemma 11.9 auch U und V stochastisch unabhängig.
- Da auch die Zufallsvariablen $\frac{X}{2} + 1$ und $-Y$ stochastisch unabhängig sind und da $\frac{X}{2} + 1$ die Verteilung $\mathcal{N}(1, 1)$ und $-Y$ die Verteilung $\mathcal{N}(-5, (-1)^2 \cdot 1) = \mathcal{N}(-5, 1)$ besitzt, gilt nach 11.16

$$\frac{X}{2} + 1 - Y \sim \mathcal{N}(1 - 5, 1 + 1) = \mathcal{N}(-4, 2).$$

- Wegen Satz 9.6 gilt $\mathbb{P}(Y \leq 7) = \Phi_{5,1}(7) = \Phi\left(\frac{7-5}{1}\right) = \Phi(2) = 0.9772$.

- Gesucht ist die Lösung $t := t_{0.975}(Z)$ von $\mathbb{P}(Z \leq t) = 0.975$, also

$$0.975 = \Phi_{1,1}(t) = \Phi(t - 1).$$

Nach 12.20 d) ist $\Phi(1.9600) = 0.975$, also $t - 1 = 1.96$ und damit

$$t_{0.975}(Z) = 1.96 + 1 = 2.96.$$

Aufgabe 3

In einem Gerät seien vier unabhängig voneinander arbeitende Temperaturfühler eingebaut, die die (nicht zufällige) Temperatur τ (in $^{\circ}C$) des Gerätes mit einem jeweils zufälligen Fehler messen. Der Messfehler Y (in $^{\circ}C$) sei jeweils $\mathcal{N}(0, 4)$ -verteilt. Während des Betriebs des Gerätes schaltet sich ein Ventilator zur Kühlung ein, sobald mindestens zwei der Temperaturfühler Temperaturen anzeigen, die die festgelegte kritische Temperatur $100^{\circ}C$ übersteigen.

- a) Welche Verteilung hat die gemessene Temperatur $X := \tau + Y$ eines Temperaturfühlers, wenn das Gerät die Temperatur τ hat?
- b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p_0 , dass ein Temperaturfühler mindestens die kritische Temperatur anzeigt, wenn die tatsächliche Temperatur $\tau = 100^\circ C$ beträgt und entsprechend die Wahrscheinlichkeit p_1 , wenn $\tau = 102^\circ C$ ist.
- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Ventilator eingeschaltet wird, wenn das Gerät gerade die kritische Temperatur $100^\circ C$ hat?
Hinweis: Welche Verteilung hat die zufällige Anzahl von Temperaturfühlern, die mindestens die Temperatur $100^\circ C$ anzeigen?
- d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Ventilator nicht eingeschaltet wird, obwohl das Gerät die Temperatur $102^\circ C$ hat.

Lösung:

- a) Wegen Satz 9.7 a) mit $a = \tau$ und $b = 1$ besitzt X die Verteilung $\mathcal{N}(\tau, 4)$.
- b) Nach Satz 9.6 gilt

$$\mathbb{P}(X < 100) = \mathbb{P}(X \leq 100) = \Phi_{\tau,4}(100) = \Phi\left(\frac{100 - \tau}{2}\right),$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass X eine stetige Zufallsvariable ist. Ist daher die tatsächliche Temperatur $\tau = 100^\circ C$, so ergibt sich

$$p_0 = \mathbb{P}(X \geq 100) = 1 - \mathbb{P}(X < 100) = 1 - \Phi\left(\frac{100 - 100}{2}\right) = 1 - \Phi(0) = 0.5$$

Ist andererseits $\tau = 102^\circ C$, so erhält man wie oben

$$p_1 = 1 - \mathbb{P}(X < 100) = 1 - \Phi\left(\frac{100 - 102}{2}\right) = 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) = 0.8413.$$

- c) Sei N die zufällige Anzahl von Temperaturfühlern, die mindestens die Temperatur $100^\circ C$ anzeigen. Es sind hier die Voraussetzungen eines Treffer-Niete Experimentes wie im Skriptum 7.4 erfüllt. Ein Treffer liegt vor, wenn ein Temperaturfühler mindestens $100^\circ C$ anzeigt. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist wegen b) gerade $p_0 = 0.5$. Da es 4 Temperaturfühler gibt, gilt $N \sim \text{Bin}(4, 0.5)$. Der Ventilator schaltet ein, wenn die Anzahl N mindestens 2 ist. Gesucht ist also

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N \geq 2) &= \mathbb{P}(N = 2) + \mathbb{P}(N = 3) + \mathbb{P}(N = 4) \\ &= \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^1 + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^0 \\ &= 6 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{11}{16} = 0.6875 \end{aligned}$$

- d) Im Gegensatz zu c) ist die Trefferwahrscheinlichkeit jetzt $p_1 = 0.8413$ und damit $N \sim \text{Bin}(4, 0.8413)$. Der Ventilator schaltet nicht ein, wenn die Anzahl N höchstens 1 ist. Gesucht ist also

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N \leq 1) &= \mathbb{P}(N = 0) + \mathbb{P}(N = 1) \\ &= \binom{4}{0} \cdot 0.8413^0 \cdot (1 - 0.8413)^4 + \binom{4}{1} \cdot 0.8413^1 \cdot (1 - 0.8413)^3 \\ &= 1 \cdot 0.00063 + 4 \cdot 0.00336 = 0.0141 \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Die gemeinsame Zähl-dichte $f_{X,Y}(i,j)$ von zwei diskreten Zufallsvariablen X und Y ist in untenstehender Tabelle angegeben. Dabei ist c eine noch zu bestimmende Konstante.

	i	-1	0	1	
	j				
-2		$2c$	$2c$	c	
-1		c	c	c	
1		$2c$	c	$2c$	
2		c	c	c	

- Bestimmen Sie die Konstante c .
- Berechnen Sie die Zähl-dichten f_X von X und f_Y von Y .
- Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Y > 0 \mid X > 0)$.
- Sind X und Y stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Berechnen Sie die Erwartungswerte $\mathbb{E}X$ und $\mathbb{E}Y$, die zweiten Momente $\mathbb{E}X^2$ und $\mathbb{E}Y^2$ und die Varianzen $V(X)$ und $V(Y)$.

Lösung:

- Damit $f_{X,Y}$ eine Zähl-dichte ist, muss $\sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-2}^2 f_{X,Y}(i,j) = 16 \cdot c = 1$ gelten, also $c = \frac{1}{16}$.
Damit ist dann $f_{X,Y}$ tatsächlich eine Zähl-dichte, d.h. es ist auch $f_{X,Y}(i,j) \geq 0$.
- Die Zähl-dichten f_X bzw. f_Y erhält man aus der Tabelle durch Bilden der Spaltensummen bzw. Zeilensummen:

	i	-1	0	1	
	j				$f_Y(j)$
-2		$2/16$	$2/16$	$1/16$	$5/16$
-1		$1/16$	$1/16$	$1/16$	$3/16$
1		$2/16$	$1/16$	$2/16$	$5/16$
2		$1/16$	$1/16$	$1/16$	$3/16$
$f_X(i)$		$6/16$	$5/16$	$5/16$	

- Nach Definition gilt allgemein $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ für zwei Ereignisse A und B . Hier ist $A = \{Y > 0\} = \{Y = 1\} \cup \{Y = 2\}$ und $B = \{X > 0\} = \{X = 1\}$, ferner $A \cap B = \{X = 1, Y = 1\} \cup \{X = 1, Y = 2\} = \{X = 1, Y = 1\} + \{X = 1, Y = 2\}$. Damit gilt

- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = f_{X,Y}(1, 1) + f_{X,Y}(1, 2) = \frac{3}{16}$,
- $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(X = 1) = f_X(1) = \frac{5}{16}$, insgesamt

$$\mathbb{P}(Y > 0 \mid X > 0) = \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{5}{16}} = \frac{3}{5}.$$

d) Wären X und Y stochastisch unabhängig, so müsste

$$\mathbb{P}(Y > 0 \mid X > 0) = \frac{3}{5} = \mathbb{P}(Y > 0) = \frac{3+5}{16} = \frac{1}{2}$$

gelten. Da dies falsch ist, können X und Y nicht unabhängig sein.

e) Wegen b) gilt

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=-1}^1 i \cdot f_X(i) = -1 \cdot \frac{6}{16} + 0 \cdot \frac{5}{16} + 1 \cdot \frac{5}{16} = -\frac{1}{16}$$

$$\mathbb{E}X^2 = \sum_{i=-1}^1 i^2 \cdot f_X(i) = 1 \cdot \frac{6}{16} + 0 \cdot \frac{5}{16} + 1 \cdot \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$$

$$V(X) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{11}{16} - \left(\frac{1}{16}\right)^2 = \frac{175}{256} = 0.6836$$

$$\mathbb{E}Y = \sum_{j=-2}^2 j \cdot f_Y(j) = -2 \cdot \frac{5}{16} - 1 \cdot \frac{3}{16} + 1 \cdot \frac{5}{16} + 2 \cdot \frac{3}{16} = -\frac{1}{8}$$

$$\mathbb{E}Y^2 = \sum_{j=-2}^2 j^2 \cdot f_Y(j) = 4 \cdot \frac{5}{16} + 1 \cdot \frac{3}{16} + 1 \cdot \frac{5}{16} + 4 \cdot \frac{3}{16} = \frac{5}{2}$$

$$V(Y) = \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2 = \frac{159}{64} = 2.4844$$

Aufgabe 5

Jeden Morgen treffen in einer Transportfirma die Aufträge für den Tag ein. Die Firma beobachtet, dass die zufällige Anzahl N der Aufträge für einen Tag eine Poisson-Verteilung $Po(\alpha)$ besitzt und dass im Mittel 2 Aufträge für jeden Tag eintreffen.

- Begründen Sie, dass für den Parameter der Poisson-Verteilung $\alpha = 2$ gilt.
- Berechnen Sie $P(N \leq k)$ für $k = 0, 1, 2$.
- Für jeden Auftrag braucht ein Fahrzeug genau einen Tag. Es werden nur soviel Aufträge angenommen, wie pro Tag ausgeführt werden können. Wieviele Fahrzeuge muss die Firma mindestens zur Verfügung haben, damit mit Wahrscheinlichkeit ≥ 0.6 kein Auftrag abgelehnt werden muss?

Hinweis: Verwenden Sie Teil b).

- Seien N_1, N_2, \dots, N_5 die zufälligen Anzahlen von Aufträgen an den 5 Arbeitstagen einer Woche. Sei G die zufällige Anzahl von Aufträgen, die innerhalb einer Woche in der Firma eintreffen. Bestimmen Sie eine geeignete Formel für G unter Verwendung von N_1, \dots, N_5 .

- e) Welche Verteilung besitzt G , wenn N_1, \dots, N_5 stochastisch unabhängig sind? Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von G .

Lösung:

- a) Ist N eine Zufallsvariable mit Verteilung $Po(\alpha)$, so gilt $\mathbb{E}N = \alpha$. Nach Voraussetzung gilt $\mathbb{E}N = 2$ und damit auch $\alpha = 2$.
- b) Allgemein gilt $\mathbb{P}(N \leq k) = \mathbb{P}(N = 0) + \mathbb{P}(N = 1) + \dots + \mathbb{P}(N = k)$. Wegen $N \sim Po(2)$ gilt

$$\mathbb{P}(N = k) = e^{-2} \cdot \frac{2^k}{k!}$$

und damit

k	$\mathbb{P}(N = k)$	$\mathbb{P}(N \leq k)$
0	0.1353	0.1353
1	0.2707	0.4060
2	0.2707	0.6767

- c) Sei b die Anzahl der zur Verfügung stehenden Fahrzeuge. Gilt $N \leq b$, so stehen genügend Fahrzeuge zur Verfügung und kein Auftrag braucht abgelehnt zu werden. Ist dagegen $N > b$, so muss mindestens ein Auftrag abgelehnt werden. Daher ist b so zu bestimmen, dass

$$\mathbb{P}(N \leq b) \geq 0.6$$

erfüllt ist.

Aus Teil b) folgt, dass für $b = 1$ $\mathbb{P}(N \leq b) = 0.4060 < 0.6$ ist. 1 Fahrzeug reicht daher nicht aus. Für $b = 2$ gilt dagegen $\mathbb{P}(N \leq b) = 0.6767 > 0.6$. 2 Fahrzeuge, natürlich auch mehr, reichen daher aus.

Es müssen daher mindestens 2 Fahrzeuge vorhanden sein.

- d) Eine geeignete Formel für G ist

$$G = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5.$$

- e) Da jede der stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen N_1, \dots, N_5 die Verteilung $Po(2)$ besitzt, gilt nach der Faltungsformel

$$G \sim Po(2 + 2 + 2 + 2 + 2) = Po(10).$$

Damit gilt dann auch

- $\mathbb{E}G = 10$ und
- $V(G) = 10$.

Aufgabe 6

Eine chemische Fabrik benötigt für einen Produktionsprozess einen bestimmten Katalysator, dessen zufällige Lebensdauer X die Dichte

$$f_{\vartheta}(x) = \begin{cases} 4\vartheta^4 \cdot x^3 \cdot e^{-\vartheta^4 x^4}, & x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

mit einem unbekanntem Parameter $\vartheta > 0$ besitzt.

a) Zeigen Sie, dass X die Verteilungsfunktion

$$F_{\vartheta}(x) := \begin{cases} 1 - e^{-\vartheta^4 x^4}, & x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

besitzt.

b) Sei $Y := X^4$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}(Y > y) = e^{-\vartheta^4 y}, \quad y > 0$$

gilt. Welche Verteilung besitzt Y ?

Hinweis: Geben Sie bei der Verteilung auch den oder die Parameter an!

c) Bestimmen Sie

c₁) Bestimmen Sie das 4., das 8. und das 12. Moment von X .

c₂) Berechnen Sie die Kovarianz von X^4 und X^8 .

Hinweis: Diese Aufgabenteile können ohne Integration gelöst werden. Benützen Sie b).

Lösung:

a) Wegen Satz 8.12 genügt es zu zeigen, dass die Funktion F_{ϑ} stetig, bis auf endlich viele Stellen stetig differenzierbar ist und gerade die Ableitung f_{ϑ} besitzt. Allein kritisch ist, dass F_{ϑ} an der Stelle 0 stetig ist. Nähert sich x von oben dem Wert 0, so geht $-\vartheta^4 x^4$ selbst gegen 0, damit $e^{-\vartheta^4 x^4}$ gegen 1 und $F_{\vartheta}(x) = 1 - e^{-\vartheta^4 x^4}$ gegen 0. Dies stimmt mit dem Wert von $F_{\vartheta}(x)$ überein, wenn sich x von unten dem Wert 0 nähert.

Die Ableitung von $F_{\vartheta}(x)$ ergibt sich für $x > 0$ nach der Kettenregel zu

$$F'_{\vartheta}(x) = -(-\vartheta^4 x^4)' \cdot e^{-\vartheta^4 x^4} = -(-4\vartheta^4 \cdot x^3) \cdot e^{-\vartheta^4 x^4} = f_{\vartheta}(x)$$

b) Sei $y > 0$. Da X eine positive Zufallsvariable ist, gilt $X^4 > y$ genau dann, wenn $X > y^{1/4}$ ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y > y) &= \mathbb{P}(X^4 > y) = \mathbb{P}(X > y^{1/4}) = 1 - F_{\vartheta}(y^{1/4}) \\ &= 1 - (1 - e^{-\vartheta^4 (y^{1/4})^4}) = e^{-\vartheta^4 y} \end{aligned}$$

für $y > 0$. Für die Verteilungsfunktion F_Y von Y gilt daher

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = 1 - \mathbb{P}(Y > y) = 1 - e^{-\vartheta^4 y}, \quad y > 0.$$

Dies ist gerade die Verteilungsfunktion von $Exp(\vartheta^4)$. Damit gilt $Y \sim Exp(\vartheta^4)$.

- c) Es gilt $X^4 = Y$, $X^8 = Y^2$ und $X^{12} = Y^3$, wobei $Y \sim \text{Exp}(\vartheta^4) = \Gamma(1, \vartheta^4)$ (Skript 9.3).
 c₁) Wegen Beispiel 12.16 b) gilt für $Y \sim \Gamma(1, \vartheta^4)$ allgemein für $k = 1, 2, \dots$

$$\mathbb{E}Y^k = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}{(\vartheta^4)^k},$$

insbesondere

- $\mathbb{E}X^4 = \mathbb{E}Y^1 = \frac{1}{\vartheta^4}$,
- $\mathbb{E}X^8 = \mathbb{E}Y^2 = \frac{2}{\vartheta^8}$ und
- $\mathbb{E}X^{12} = \mathbb{E}Y^3 = \frac{6}{\vartheta^{12}}$.

- c₂) Wegen Satz 12.23 a) gilt

$$\begin{aligned} C(X^4, X^8) &= \mathbb{E}(X^4 \cdot X^8) - \mathbb{E}(X^4) \cdot \mathbb{E}(X^8) = \mathbb{E}(X^{12}) - \mathbb{E}(X^4) \cdot \mathbb{E}(X^8) \\ &= \frac{6}{\vartheta^{12}} - \frac{1}{\vartheta^4} \cdot \frac{2}{\vartheta^8} = \frac{4}{\vartheta^{12}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 7

Es soll der unbekannte Parameter $\vartheta > 0$ für die Verteilung mit der Dichte

$$f_\vartheta(x) = \begin{cases} 4\vartheta^4 \cdot x^3 \cdot e^{-\vartheta^4 x^4}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

aus Aufgabe 6) bestimmt werden.

- a) Berechnen Sie zur Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n)$ mit $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$ die Likelihood-Funktion $L_x(\vartheta)$ und die Loglikelihood-Funktion $M_x(\vartheta)$.
 b) Zeigen Sie, dass

$$\hat{\vartheta}(x) = \left(\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^4} \right)^{1/4}$$

der Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ zur Stichprobe x ist.

- c) Bestimmen Sie den Momentenschätzer $\hat{\vartheta}_1(x)$ zur Stichprobe x .
Hinweis: Sie dürfen ohne Nachweis verwenden, dass $\mathbb{E}X = 0.9064/\vartheta$ für jede Zufallsvariable X mit Dichte f_ϑ gilt.
 d) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\vartheta}(x)$ und den Momenten-Schätzwert $\hat{\vartheta}_1(x)$ für die Stichprobe

$$x = (2.4, 2.1, 1.8, 1.6, 1.3, 1.9, 1.9, 0.9, 1.6, 2.3).$$

Hinweis: $\sum_{i=1}^{10} x_i = 17.8$, $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 33.54$ und $\sum_{i=1}^{10} x_i^4 = 133.791$.

Lösung:

a) Wegen Definition 17.6 gilt

$$\begin{aligned} L_x(\vartheta) &= f_\vartheta(x_1) \cdot \dots \cdot f_\vartheta(x_n) \\ &= 4\vartheta^4 \cdot x_1^3 \cdot e^{-\vartheta^4 x_1^4} \cdot \dots \cdot 4\vartheta^4 \cdot x_n^3 \cdot e^{-\vartheta^4 x_n^4} = 4^n \cdot (\vartheta^4)^n \cdot \prod_{i=1}^n x_i^3 \cdot e^{-\vartheta^4 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^4} \\ &= 4^n \cdot \prod_{i=1}^n x_i^3 \cdot \vartheta^{4n} \cdot e^{-\vartheta^4 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^4}. \end{aligned}$$

Nach Logarithmieren ergibt sich

$$M_x(\vartheta) = \ln(L_x(\vartheta)) = n \cdot \ln(4) + \sum_{i=1}^n 3 \ln(x_i) + 4n \cdot \ln(\vartheta) - \vartheta^4 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^4$$

Alternativ kann man hier auch $M_x(\vartheta) = \sum_{i=1}^n \ln(f_\vartheta(x_i))$ ausnützen. Mit $\ln(f_\vartheta(x)) = \ln(4) + 4 \ln(\vartheta) + 3 \ln(x) - \vartheta^4 x^4$ ergibt sich für $M_x(\vartheta)$ der gleiche Wert.

b) Eine (globale) Maximumstelle von M_x erhalten wir durch Differenzieren.

$$M'_x(\vartheta) = \frac{4n}{\vartheta} - 4 \cdot \vartheta^3 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^4 = 4n \cdot \vartheta^3 \cdot \left(\frac{1}{\vartheta^4} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^4 \right)$$

Es ist $M'_x(\vartheta) \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} 0$ genau dann, wenn $\frac{1}{\vartheta^4} \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^4$. Dies gilt genau dann,

wenn $\vartheta \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} \left(\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^4} \right)^{1/4} =: \hat{\vartheta}(x)$. Dies bedeutet, dass die Funktion $\vartheta \rightarrow M_x(\vartheta)$

unterhalb von $\hat{\vartheta}(x)$ zuerst steigt und ab $\hat{\vartheta}(x)$ fällt. An der Stelle $\hat{\vartheta}(x)$ liegt also eine (globale) Maximumstelle von M_x und damit ist $\hat{\vartheta}(x)$ der gesuchte Maximum-Likelihood-Schätzer.

c) Den Momentenschätzer $\hat{\vartheta}_1(x)$ erhalten wir durch Gleichsetzen von \bar{x} und $\mathbb{E}X$. Aus der Gleichung

$$0.9064/\hat{\vartheta}_1(x) = \mathbb{E}X = \bar{x}$$

ergibt sich

$$\hat{\vartheta}_1(x) = \frac{0.9064}{\bar{x}}.$$

d) Es ist $\bar{x} = 1.78$, $\sum_{i=1}^{10} x_i^4 = 133.791$ und damit

- $\hat{\vartheta}(x) = \left(\frac{10}{133.791} \right)^{1/4} = 0.5229$ und
- $\hat{\vartheta}_1(x) = \frac{0.9064}{\bar{x}} = \frac{0.9064}{1.78} = 0.5092$.

Bem.: Die Werte entstammen einer Stichprobe mit $\vartheta = 0.5$.