

Klausur (Maschineningenieure)
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
vom 2.3.2007
Musterlösungen

Aufgabe 1:

Gegeben sei eine Urliste mit den Paaren $(x_1, y_1), \dots, (x_{12}, y_{12})$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_j	1.1	1.9	3	4.4	4.8	6.2	7	7.9	8.9	10.3	11.3	11.9
y_j	7.3	8.2	6.4	6.3	3	3.2	-0.3	-2.1	-1.6	-1.5	-3.7	-3.6

- a) Berechnen Sie die Stichprobenmittel \bar{x} , \bar{y} , die Stichproben-Standardabweichungen s_x , s_y und den empirischen Korrelationskoeffizienten r_{xy} .

Lösung: Direkt aus den Daten ergibt sich gemäß Definition 1.8 und Paragraph 1.5 unter Ausnützung der Beziehung

$$\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y}) = \sum_{j=1}^n x_j \cdot y_j - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$\bar{x} = 6.56$$

$$s_x = 3.625$$

$$\bar{y} = 1.8$$

$$s_y = 4.447$$

$$r_{xy} = -0.9584$$

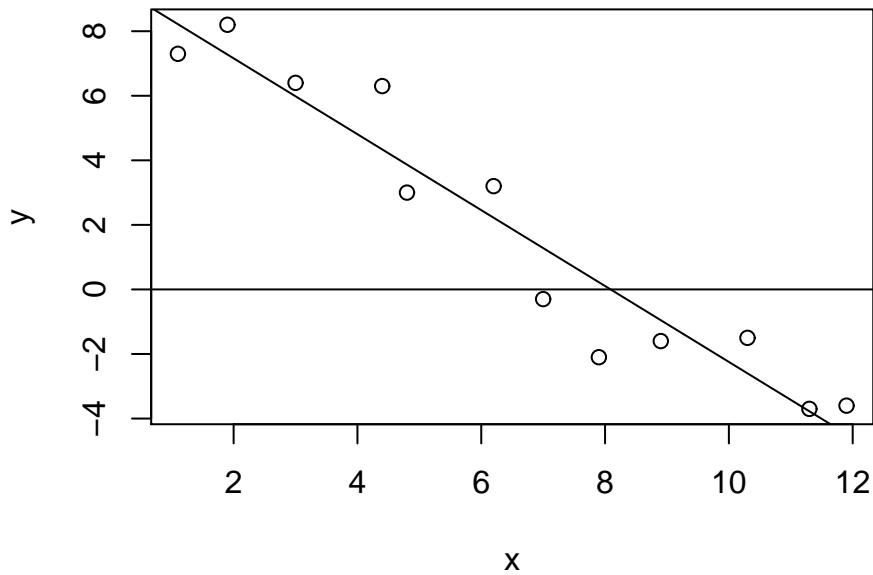
- b) Bestimmen Sie die zugehörige Regressionsgerade $y = a^* + b^* \cdot x$ von y auf x .

Lösung: Nach Paragraph 1.5 ist $b^* = r_{xy} \cdot \frac{s_y}{s_x}$ und $a^* = \bar{y} - b^* \cdot \bar{x}$, also

$$b^* = -1.176$$

$$a^* = 9.51$$

und die Regressionsgerade $y = 9.51 - 1.176 \cdot x$.



Punkte und Regressionsgerade $y = a^* + b^* \cdot x$

Für die Lösung der nächsten drei Aufgabenteile benötigen wir die aufsteigend sortierten y -Werte. Es ist

$$y_{()} = (-3.7, -3.6, -2.1, -1.6, -1.5, -0.3, 3, 3.2, 6.3, 6.4, 7.3, 8.2)$$

- c) Berechnen Sie das 0.2-getrimmte Stichprobenmittel $\bar{y}_{0.2}$ von (y_1, \dots, y_{12}) .
Lösung: Mit $k = [12 \cdot 0.2] = 2$ ergibt sich

$$\bar{y}_{0.2} = \frac{1}{12 - 2 \cdot 2} \cdot (y_{(3)} + \dots + y_{(10)}) = 1.675$$

- d) Bestimmen Sie das Stichproben-0.15-Quantil $\tilde{y}_{0.15}$ von (y_1, \dots, y_{12}) .
Lösung: Da $12 \cdot 0.15 = 1.8$ nicht ganzzahlig ist, ist mit $k = [1.8] = 1$

$$\tilde{y}_{0.15} = y_{(k+1)} = y_{(2)} = -3.6$$

- e) Berechnen Sie den Quartilsabstand von (y_1, \dots, y_{12}) .
Lösung: Da $0.25 \cdot 12 = 3$ und $0.75 \cdot 12 = 9$ beide ganzzahlig sind, ergibt sich mit $k_1 = 3$ und $k_2 = 9$

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{0.25} &= \frac{y_{(k_1)} + y_{(k_1+1)}}{2} = \frac{y_{(3)} + y_{(4)}}{2} = -1.85 \\ \tilde{y}_{0.75} &= \frac{y_{(k_2)} + y_{(k_2+1)}}{2} = \frac{y_{(9)} + y_{(10)}}{2} = 6.35 \end{aligned}$$

und damit der Quartilsabstand zu $\tilde{y}_{0.75} - \tilde{y}_{0.25} = 8.2$.

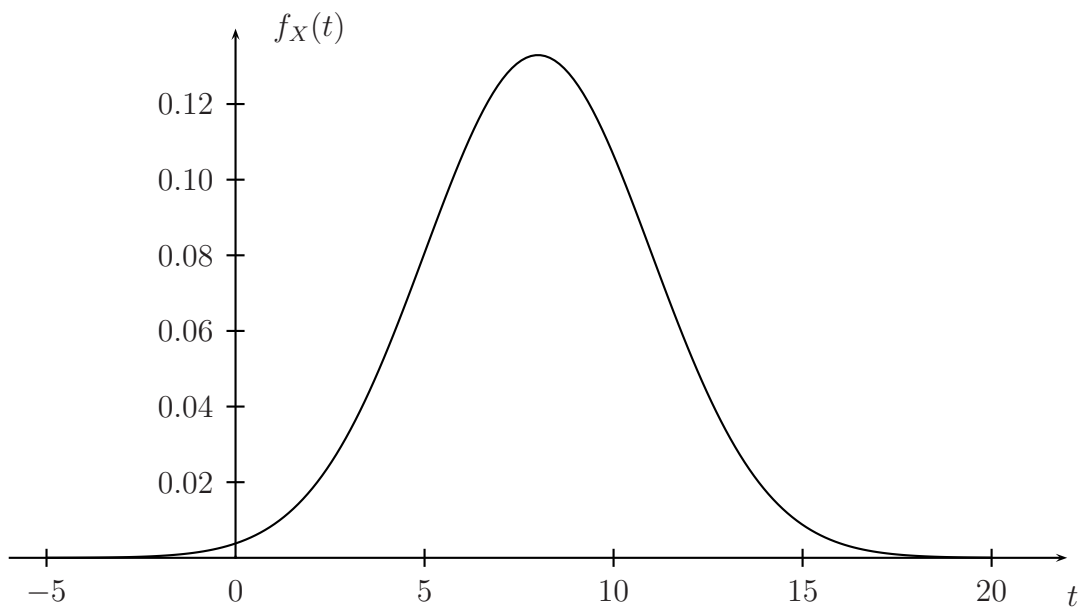
Aufgabe 2

Die Zufallsvariable X besitze die Verteilung $\mathcal{N}(8, 9)$ und die Zufallsvariable Y die Verteilung $\mathcal{N}(-3, 16)$. X und Y seien stochastisch unabhängig.

- Skizzieren Sie die Dichte $f_X(t)$ von X für $0 \leq t \leq 20$.
- Welche Verteilung besitzt $Z := X + Y$ und welche Verteilung besitzt $U := X - Y$?
- Bestimmen Sie die Varianz $V(U)$ von U .
- Berechnen Sie die Kovarianz $C(U, Y)$ von U und Y . Sind U und Y positiv korreliert, negativ korreliert oder unkorreliert?
- Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X \geq 14)$.
- Berechnen Sie das 0.975-Quantil von Y .

Lösung:

- a) Wegen (9.3) ist $f_X(t) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-8)^2}{2 \cdot 9}}$ und damit



- b) Es ist $-Y \sim \mathcal{N}(3, 16)$, also nach der Faltungsformel 11.16

$$\begin{aligned} Z &\sim \mathcal{N}(8 - 3, 9 + 16) = \mathcal{N}(5, 25), \\ U = X + (-Y) &\sim \mathcal{N}(8 + 3, 9 + 16) = \mathcal{N}(11, 25). \end{aligned}$$

- c) Der zweite Parameter von $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ist die Varianz dieser Verteilung, also wegen b) $V(Z) = 25$.
- d) Wegen Satz 12.23 und der Unabhängigkeit von X und Y gilt

$$C(U, Y) = C(X - Y, Y) = C(X, Y) - C(Y, Y) = 0 - V(Y) = -16.$$

Hieraus erhält man ohne Rechnung, dass $\rho(U, Y) < 0$ ist. Daher sind U und Y negativ korreliert.

e) Wegen der Stetigkeit von $\mathcal{N}(8, 9)$ gilt nach (9.6) und Tabelle A.1

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 14) &= \mathbb{P}(X > 14) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 14) = 1 - \Phi\left(\frac{14 - 8}{3}\right) \\ &= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = \underline{0.0228}.\end{aligned}$$

f) Nach Definition 12.19 gilt, dass $t_{0.975}$ die Lösung ist von

$$\Phi_{-3,16}(t_{0.975}) = \Phi\left(\frac{t_{0.975} - (-3)}{4}\right) = 0.975.$$

Wegen $\Phi(1.96) = 0.975$ gilt also

$$\frac{t_{0.975} + 3}{4} = 1.96$$

und daraus $t_{0.975} = 4 \cdot 1.96 - 3 = \underline{4.84}$. (Man kann hierfür auch 12.20 c) benützen.)

Aufgabe 3

Ein Arbeiter überwacht 3 Aggregate, die unabhängig voneinander arbeiten. Sei A_i das Ereignis, dass Aggregat i einer Überprüfung bedarf und $p_i = \mathbb{P}(A_i)$ die zugehörige Wahrscheinlichkeit, $i = 1, 2, 3$, mit $p_1 = 0.2$, $p_2 = 0.4$ und $p_3 = 0.6$. Die Ereignisse A_1, A_2 und A_3 seien stochastisch unabhängig.

B sei das Ereignis „Mindestens ein Aggregat bedarf einer Überprüfung“.

- Berechnen Sie $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ und $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2)$.
- Stellen Sie B formelmäßig mit Hilfe von A_1, A_2, A_3 dar:
 $B =$
- Berechnen Sie $\mathbb{P}(B)$.
- Berechnen Sie die (bedingte) Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A_1 \mid B)$, dass Aggregat 1 einer Überprüfung bedarf, wenn mindestens ein Aggregat einer Überprüfung bedarf.
- Welche der folgenden Paare von Ereignissen sind unabhängig, welche nicht? (Begründen Sie Ihre Antwort!)
 - A_1 und B ,
 - A_1 und $A_2 \cap A_3$,
 - A_1 und A_3^c .

Lösung: a) Da A_1, A_2 und A_3 unabhängig sind, gilt

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3) = 0.048.$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \\ &\stackrel{A_1, A_2 \text{ unabhängig}}{=} p_1 + p_2 - \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2 = 0.52\end{aligned}$$

b) Dass mindestens ein Aggregat der Überprüfung bedarf, ist gleichbedeutend damit, dass Aggregat 1 **oder** 2 **oder** 3 einer Überprüfung bedarf. Daher gilt

$$B = A_1 \cup A_2 \cup A_3.$$

c) Wegen der Formel des Ein- und Ausschließens gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= p_1 + p_2 + p_3 - p_1p_2 - p_1p_3 - p_2p_3 + p_1p_2p_3 = 0.808 \end{aligned}$$

d) Nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit gilt wegen $A_1 \subset B$ (wenn 1 einer Überprüfung bedarf, bedarf insbesondere mindestens ein Aggregat der Überprüfung)

$$\mathbb{P}(A_1 | B) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0.2}{0.808} = 0.2475$$

e) Wegen $\mathbb{P}(A_1 | B) = 0.2475 \neq 0.2 = \mathbb{P}(A_1)$ sind A_1 und B nicht unabhängig. Sei $C := A_2 \cap A_3$. Da A_1, A_2 und A_3 unabhängig sind, gilt $\mathbb{P}(A_1 \cap C) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot (\mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3)) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(C)$. Damit sind also auch A_1 und $A_2 \cap A_3$ unabhängig. Schließlich gilt wegen Satz 10.11 und der Unabhängigkeit von A_1 und A_3

$$\mathbb{P}(A_3^c | A_1) = 1 - \mathbb{P}(A_3 | A_1) = 1 - \mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_3^c).$$

Damit sind auch A_1 und A_3^c unabhängig.

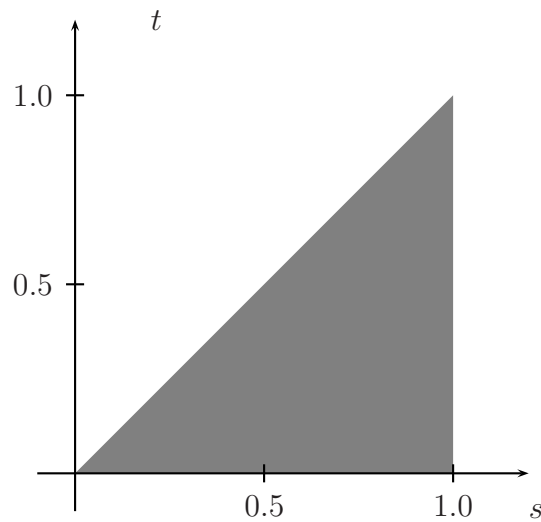
Aufgabe 4

Die Zufallsvariablen X und Y besitzen die gemeinsame Dichte

$$f_{X,Y}(s,t) = \begin{cases} 2 & \text{für } 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq s \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Skizzieren Sie die Menge $\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid f_{X,Y}(s,t) > 0\}$.
- Berechnen Sie die Dichte f_X von X und die Dichte f_Y von Y .
Hinweis: Als Ergebnis muss sich $f_X(s) = 2s$, $0 < s < 1$ und $f_Y(t) = 2 - 2t$, $0 < t < 1$ ergeben. (Sie dürfen diesen Hinweis auch ohne Nachweis für die nachfolgenden Aufgabenteile verwenden.)
- Berechnen Sie $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$, $\mathbb{E}XY$ und die Kovarianz $C(X,Y)$.
- Sind X und Y stochastisch unabhängig? (Begründen Sie Ihre Antwort!)
- Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\frac{1}{2} < Y < 1 \mid 0 < X < \frac{1}{2})$.

Lösung: a) $C := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid f_{X,Y}(s,t) > 0\}$ ist der graue Bereich in der Figur.



b) Der Skizze entnimmt man, dass $0 < X < 1$ und $0 < Y < 1$ gilt. Wegen Satz 8.7 hat X die Dichte

$$f_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s,t) dt = \int_0^s 2dt = 2t \Big|_0^s = 2s$$

für $0 < s < 1$ und Y die Dichte

$$f_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s,t) ds = \int_t^1 2ds = 2s \Big|_t^1 = 2 - 2t$$

für $0 < t < 1$. Ansonsten gilt $f_X(s) = 0$ bzw. $f_Y(t) = 0$.

c) Wegen 12.2 gilt

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx = \int_0^1 x \cdot 2x dx = \frac{2x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

und

$$\mathbb{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y) dy = \int_0^1 y \cdot (2 - 2y) dy = y^2 - \frac{2y^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Wegen Satz 12.8 gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X \cdot Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y f_{X,Y}(x,y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^x x \cdot y \cdot 2 dy \right) dx \\ &= \int_0^1 2x \left(\int_0^x y dy \right) dx = \int_0^1 2x \cdot \frac{1}{2} x^2 dx = \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

und damit $C(X,Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{36}$.

d) Wegen $C(X,Y) = \frac{1}{36} \neq 0$ sind X und Y nicht unabhängig, da aus der Unabhängigkeit $C(X,Y) = 0$ folgt.

e) Nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit gilt

$$\mathbb{P} \left(\frac{1}{2} < Y < 1 \mid 0 < X < \frac{1}{2} \right) = \frac{\mathbb{P}(\{\frac{1}{2} < Y < 1\} \cap \{0 < X < \frac{1}{2}\})}{\mathbb{P}(0 < X < \frac{1}{2})}$$

Wegen a) gilt aber $Y < X$ und daher $\mathbb{P}(\{\frac{1}{2} < Y < 1\} \cap \{0 < X < \frac{1}{2}\}) = 0$, da $X < \frac{1}{2} < Y$ und $Y < X$ unverträglich sind. Damit gilt

$$\mathbb{P} \left(\frac{1}{2} < Y < 1 \mid 0 < X < \frac{1}{2} \right) = 0.$$

Aufgabe 5

Eine Messeinrichtung habe eine zufällige Lebensdauer mit Verteilung $Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$. Immer wenn eine Messeinrichtung ausfällt, wird sie durch eine gleichartige neue ersetzt. Das Ersetzen dauert genau 3 Zeiteinheiten. Die Lebensdauern X_1, X_2, \dots der einzelnen Messeinrichtungen seien unabhängig voneinander und identisch verteilt.

$$Z_n = \sum_{i=1}^n X_i + 3n$$

ist damit der Zeitpunkt, zu dem das $(n+1)$ -te Messgerät mit den Messungen beginnt.

- Begründen Sie, dass $Z_n - 3 \cdot n$ die Verteilung $\Gamma(n, \lambda)$ besitzt.
- Bestimmen Sie $\mathbb{P}(Z_1 > t)$ für $t > 3$.
- Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_{Z_2}(t)$ und eine Dichte $f_{Z_2}(t)$ von Z_2 .
Hinweis: Die $\Gamma(2, \lambda)$ -Verteilung hat die Verteilungsfunktion

$$t \rightarrow 1 - e^{-\lambda t} \cdot (1 + \lambda t), \quad t \geq 0.$$

- Die Ersetzung einer Messeinrichtung kostet c Euro, ferner fallen pro Zeiteinheit $a > 0$ Euro laufende Kosten an (auch während der Zeit, wenn eine Messeinrichtung ersetzt wird).
 - Die (zufälligen) Kosten K_n bis zum Zeitpunkt Z_n sind von der Form

$$K_n = b_n + d_n \cdot \sum_{i=1}^n X_i$$

mit geeigneten Konstanten b_n, d_n . Bestimmen Sie b_n und d_n .

- Berechnen Sie $\mathbb{E}K_n$ und $V(K_n)$.

Lösung: a) $Z_n - 3n = \sum_{i=1}^n X_i$ ist die n -fache Faltung der $Exp(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$ -verteilten Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n . Wegen 11.16 gilt daher

$$Z_n - 3n \sim \Gamma(n, \lambda).$$

- $\mathbb{P}(Z_1 > t) = \mathbb{P}(X_1 + 3 > t) = \mathbb{P}(X_1 > t - 3) = 1 - (1 - e^{-\lambda(t-3)}) = e^{-\lambda(t-3)}$ für $t > 3$, also $t - 3 > 0$.
- Wegen a) hat $Y := Z_2 - 6$ die Verteilung $\Gamma(2, \lambda)$. Insbesondere gilt $Y > 0$ und damit

$$F_{Z_2}(t) = \mathbb{P}(Z_2 \leq t) = \mathbb{P}(Y + 6 \leq t) = \mathbb{P}(Y \leq t - 6) = 0$$

für $t \leq 6$. Für $t > 6$ gilt dagegen

$$F_{Z_2}(t) = \mathbb{P}(Y \leq t - 6) = 1 - e^{-\lambda(t-6)} \cdot (1 + \lambda(t-6)).$$

Diese Verteilungsfunktion ist stetig und bis auf eventuell die Stelle $t = 6$ stetig differenzierbar (ob F_{Z_2} auch an der einzelnen Stelle $t = 6$ differenzierbar ist, muss nicht überprüft werden). Wegen Satz 8.12 ist daher

$$f_{Z_2}(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 6 \\ F'_{Z_2}(t) = \lambda e^{-\lambda(t-6)} \cdot (1 + \lambda(t-6)) - \lambda e^{-\lambda(t-6)} = \lambda^2(t-6)e^{-\lambda(t-6)} & , t > 6 \end{cases}$$

eine Dichte von Z_2 .

d) Bis zum Zeitpunkt Z_n liegen n Ersetzungen vor, daher sind die Kosten

$$K_n = n \cdot c + a \cdot Z_n = n \cdot (c + 3 \cdot a) + a \cdot \sum_{i=1}^n X_i,$$

wobei $\sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$. Mit den Tabellen auf S. 124 und S. 128 ergibt sich

$$\mathbb{E}K_n = \mathbb{E}\left(n \cdot (c + 3 \cdot a) + a \cdot \sum_{i=1}^n X_i\right) = n \cdot (c + 3 \cdot a) + a \cdot \mathbb{E}\sum_{i=1}^n X_i = n \cdot (c + 3 \cdot a) + a \frac{n}{\lambda}$$

und wegen Satz 12.11 c)

$$V(K_n) = V\left(n \cdot (c + 3 \cdot a) + a \cdot \sum_{i=1}^n X_i\right) = V\left(a \cdot \sum_{i=1}^n X_i\right) = a^2 \cdot V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{a^2 \cdot n}{\lambda^2}.$$

Aufgabe 6

Bei $n = 200$ Kontrollen wurde die zufällige Fehlerzahl x_i bei jeweils 30 Vorgängen ermittelt, $i = 1, \dots, n$. Man nimmt an, dass die zufälligen Zahlen X_i der Fehler stochastisch unabhängig sind mit der Zähldichte

$$f_{\vartheta}(k) = \binom{30}{k} \cdot \left(\frac{\vartheta}{30}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\vartheta}{30}\right)^{30-k}, \quad k = 0, \dots, 30,$$

ϑ ein unbekannter Parameter mit $0 < \vartheta < 30$.

- Zeigen Sie, dass $T(x) = \bar{x}$ ein Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ ist.
- Welche Verteilung besitzt die zufällige Zahl der Fehler X_1 , d.h. welche Verteilung hat die Zähldichte f_{ϑ} ? (Geben Sie auch die Parameter an!)
- Ist $T(x)$ ein erwartungstreuer Schätzer für ϑ ? (Begründen Sie Ihre Antwort!)
- Insgesamt stellte man
 - 40 mal 0 Fehler,
 - 67 mal 1 Fehler,
 - 60 mal 2 Fehler,
 - 22 mal 3 Fehler,
 - 9 mal 4 Fehler und
 - 2 mal 5 Fehler fest.

Berechnen Sie das Stichprobenmittel \bar{x} und die Stichprobenvarianz s_x^2 .

Lösung: a) Wir berechnen die Loglikelihood-Funktion $M_x(\vartheta)$. Es gilt $\ln(f_\vartheta(k)) = \ln \binom{30}{k} + k \cdot \ln(\vartheta/30) + (30 - k) \cdot \ln(1 - \vartheta/30)$ und damit

$$\begin{aligned} M_x(\vartheta) &= \sum_{i=1}^n \ln(f_\vartheta(x_i)) = \sum_{i=1}^n \left[\ln \binom{30}{x_i} + x_i \cdot \ln(\vartheta/30) + (n - x_i) \cdot \ln(1 - \vartheta/30) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \ln \binom{30}{x_i} + \ln(\vartheta/30) \cdot \sum_{i=1}^n x_i + \ln(1 - \vartheta/30) \cdot \sum_{i=1}^n (30 - x_i) \end{aligned}$$

M_x besitzt die Ableitung

$$\begin{aligned} M'_x(\vartheta) &= \frac{1}{\vartheta} \cdot \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{30 - \vartheta} \cdot \sum_{i=1}^n (30 - x_i) = \frac{n \cdot \bar{x}}{\vartheta} - \frac{n \cdot (30 - \bar{x})}{30 - \vartheta} \\ &= \frac{n \cdot \bar{x} \cdot (30 - \vartheta) - n \cdot (30 - \bar{x}) \cdot \vartheta}{\vartheta \cdot (30 - \vartheta)} = \frac{n \cdot \bar{x} \cdot 30 - n \cdot 30 \cdot \vartheta}{\vartheta \cdot (30 - \vartheta)} = \frac{30 \cdot n}{\vartheta \cdot (30 - \vartheta)} \cdot (\bar{x} - \vartheta) \end{aligned}$$

wobei wir $\sum_{i=1}^n x_i = n \cdot \bar{x}$ benützt haben. Hierbei ist $\frac{30 \cdot n}{\vartheta \cdot (30 - \vartheta)} > 0$ und damit

$$M'_x(\vartheta) \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} 0 \quad \text{genau dann, wenn} \quad \vartheta \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} \bar{x}.$$

Dies bedeutet, dass die Funktion M_x unterhalb von $T(x) = \bar{x}$ steigt und oberhalb von $T(x) = \bar{x}$ fällt. Damit ist $T(x)$ die (einzige) Maximumstelle von M_x .

b) Es ist $f_\vartheta(k) = \binom{30}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{30-k}$ mit $p := \frac{\vartheta}{30}$ und dies ist gerade die Zähldichte von $Bin(30, p)$. Daher besitzt X_1 die Verteilung $Bin(30, \frac{\vartheta}{30})$.

c) Wegen Satz 17.13 ist $T(x) = \bar{x}$ ein erwartungstreuer Schätzer für $\mathbb{E}_\vartheta X_1$. Wegen der Tabelle auf S. 124 und c) gilt $\mathbb{E}_\vartheta X_1 = 30 \cdot \frac{\vartheta}{30} = \vartheta$. Damit ist $T(x)$ auch ein erwartungstreuer Schätzer für ϑ .

d) Zur Berechnung von \bar{x} und s_x^2 kann Satz 1.10 verwendet werden. Alternativ berechnet man direkt $\sum_{i=1}^{200} x_i = 40 \cdot 0 + 67 \cdot 1 + \dots + 2 \cdot 5 = 299$ und $\sum_{i=1}^{200} x_i^2 = 40 \cdot 0^2 + 67 \cdot 1^2 + \dots + 2 \cdot 5^2 = 699$ und damit

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{200} \cdot \sum_{i=1}^{200} x_i = \frac{299}{200} = \underline{1.495} \quad \text{und} \\ s_x^2 &= \frac{1}{n - 1} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] = \frac{1}{199} \left(699 - \frac{299^2}{200} \right) = \underline{1.2663}. \end{aligned}$$

Aufgabe 7

Eine Firma besitzt 16 gleichartige Messgeräte, welche unabhängig voneinander und unter gleichen Bedingungen 2 Jahre lang ohne Wartung eingesetzt wurden. Bei der Überprüfung dieser Messgeräte stellt sich heraus, dass 10 dieser Messgeräte keine korrekten Messergebnisse mehr liefern.

- a) Es sei p die unbekannte Wahrscheinlichkeit, dass ein Messgerät auch nach 2 Jahren noch korrekte Messergebnisse liefert. Geben Sie ein Konfidenzintervall für die Wahrscheinlichkeit p zur Konfidenzwahrscheinlichkeit 0.90 an.

Lösung: Nach Voraussetzung kann wie in Beispiel 18.5 ein ideales Zufallsexperiment mit den zwei möglichen Ergebnissen „Keine korrekten Messergebnisse“ (Treffer) und „Korrekte Messergebnisse“ (Niete) und der Trefferwahrscheinlichkeit $\vartheta := 1 - p$ angesehen werden. Nach diesem Beispiel und wegen 18.6 ist mit $n = 16$ und $x = 10$ das gesuchte Konfidenzintervall $[l(x), L(x)]$, wobei die Konfidenzgrenzen $l(x)$ und $L(x)$ für $x = 10$ und $n - x = 6$ und $1 - \alpha = 0.9$ aus Tabelle A.4 entnommen werden. Dies ergibt das Konfidenzintervall $\mathcal{C}_1(x) = [0.391, 0.822]$ für $\vartheta = 1 - p$. Für $p = 1 - \vartheta$ ist daher das gesuchte Konfidenzintervall

$$[1 - 0.822, 1 - 0.391] = [0.178, 0.609].$$

- b) Sie suchen jetzt ein Konfidenzintervall für p zum Konfidenzniveau 0.95. Ist dieses kleiner oder größer als das zur Konfidenzwahrscheinlichkeit 0.9?

Lösung: Für das Konfidenzintervall zur Konfidenzwahrscheinlichkeit 0.95 erhält man aus Tabelle A.4 $\mathcal{C}_2(x) = [0.354, 0.848]$ für $\vartheta = 1 - p$, daher ist auch das Konfidenzintervall

$$[0.152, 0.646]$$

für p zur Konfidenzwahrscheinlichkeit 0.95 größer als $[0.178, 0.609]$. (Dies gilt allgemein: Wird die Konfidenzwahrscheinlichkeit (die Sicherheit) erhöht, so muss auch das Konfidenzintervall größer werden.)