

Weitere Überraschungen im Zusammenhang mit dem Schnur-Orakel

NORBERT HENZE, KARLSRUHE

Zusammenfassung: Bezeichnet R_n die Anzahl der entstehenden Ringe beim rein zufälligen Verknoten der Enden von n Schnüren, so hat das Ereignis $\{R_n = 1\}$ eine überraschend hohe Wahrscheinlichkeit (siehe Prochno und Schmitz (2013)). Welche Verteilung besitzt R_n ? Gibt es eine einfache Formel für den Erwartungswert von R_n ? Kann man eine Näherung für die Verteilung von R_n für großes n angeben? Im vorliegenden Aufsatz werden diese Fragen beantwortet. Es wird sich u.a. zeigen, dass der Erwartungswert von R_n schon für kleine Werte von n bis auf drei Nachkommastellen durch $0,5 \ln n + 0,98175$ gegeben ist. Überraschenderweise erhält man also selbst bei einer Million Schnüre im Mittel weniger als 8 Ringe.

1 Einleitung

Man fasse n gleich lange Schnüre so in der Mitte, dass die $2n$ Enden frei herunterhängen und nehme die Schnur-Mitten in eine geschlossene Faust, so dass nicht ersichtlich ist, welche Schnur-Enden zusammen passen. Jetzt bitte man jemanden (weil man hierzu zwei Hände frei haben muss) alle Schnur-Enden rein zufällig zu verknoten. Öffnet man danach die Faust, so entsteht eine mit R_n bezeichnete zufällige Anzahl von Ringen.

Prochno und Schmitz (2013) haben ausgehend vom Fall $n = 3$ die (erstaunlich große) Wahrscheinlichkeit

$$P(R_n = 1) = \frac{(2^{n-1}(n-1)!)^2}{(2n-1)!} \quad (1)$$

hergeleitet und mit Hilfe der Stirling-Formel hierfür die Näherung

$$P(R_n = 1) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n-1}}$$

angegeben. So ist selbst bei 50 Schnüren die Wahrscheinlichkeit noch ca. $1/8$, dass nach Öffnen der Faust nur ein einziger großer Ring entsteht.

Ganz natürliche Fragen, die sich hier geradezu aufdrängen, sind:

- Welche Verteilung besitzt R_n ?
- Welchen Erwartungswert besitzt R_n ?
- Gibt es Zusammenhänge mit anderen Verteilungen?

- Wie verhält sich R_n bei wachsendem n ?

Wir werden im Folgenden alle diese Fragen beantworten und weitere Überraschungen im Zusammenhang mit dem Schnur-Orakel erleben. So ist der Erwartungswert von R_n , also die auf die Dauer erwartete mittlere Anzahl an Ringen, selbst bei 50 Schnüren kleiner als 3 und bei einer Million Schnüren kleiner als 8. Es wird sich auch zeigen, dass die Verteilung von R_n eng mit der Verteilung der Anzahl der Rekorde in einer rein zufälligen Permutation der Zahlen $1, 2, \dots, 2n$ verknüpft ist (siehe Abschnitt 6 oder ausführlicher z.B. Henze (2008)). Wir werden zudem eine exakte und eine sehr genaue Näherungsformel für den Erwartungswert von R_n angeben und auch die Varianz von R_n sowie die exakte sowie die asymptotische Verteilung von R_n bestimmen. Der Schlüssel für diese Ergebnisse ist eine Darstellung von R_n als Summe unabhängiger Indikatorvariablen.

2 Die Verteilung von R_n

Offenbar kann die Zufallsvariable R_n jeden der Werte $1, 2, \dots, n$ annehmen. Um die mit

$$p_{n,k} := P(R_n = k), \quad k = 1, \dots, n$$

bezeichneten Wahrscheinlichkeiten und damit die Verteilung von R_n zu bestimmen, beginnen wir mit der Situation, dass nur zwei Schnüre vorliegen. Hier erhält man unmittelbar

$$p_{2,1} = \frac{2}{3}, \quad p_{2,2} = \frac{1}{3},$$

denn der Fall $R_2 = 1$, also das Entstehen nur eines Ringes, tritt genau dann ein, wenn das für die Verknotung gewählte Schnur-Ende mit einem der beiden Enden der anderen Schnur verknotet wird. In gleicher Weise ist der Fall $n = 3$ schnell abgehandelt: Es gilt

$$p_{3,1} = \frac{8}{15}, \quad p_{3,2} = \frac{6}{15}, \quad p_{3,3} = \frac{1}{15}.$$

Dabei wurde $p_{3,1}$ in Prochno und Schmitz (2013) hergeleitet. Die Maximalzahl von drei Ringen kann sich nur ergeben, wenn die erste Verknotung mit dem anderen Ende der gewählten Schnur erfolgt, wofür einer von fünf Fällen günstig ist. Für die zweite Verknotung ist dann einer von drei Fällen günstig. Nach der Pfadregel erhält man die Wahrscheinlichkeit $p_{3,3}$ zu $1/5 \cdot 1/3 = 1/15$. Die Wahrscheinlichkeit $p_{3,2}$

folgt jetzt ohne weitere Überlegungen aus der Beziehung $p_{3,1} + p_{3,2} + p_{3,3} = 1$. Aus den obigen Wahrscheinlichkeiten ergeben sich die Erwartungswerte von R_2 und R_3 zu

$$E(R_2) = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3},$$

$$E(R_3) = \frac{8}{15} \cdot 1 + \frac{6}{15} \cdot 2 + \frac{1}{15} \cdot 3 = \frac{23}{15} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}.$$

Die folgende, schon in Prochno und Schmitz (2013) angestellte Überlegung zeigt, wie man die Verteilung von R_n rekursiv erhalten kann: Sind die Wahrscheinlichkeiten $p_{n,1}, \dots, p_{n,n}$ für ein n bestimmt, so fügen wir den n Schnüren gedanklich eine weitere $(n+1)$ -te Schnur hinzu. Aus Symmetriegründen können wir eine rein zufällige Verknotung der $n+1$ Schnüre beginnen, indem wir für die erste Verknotung eines der Enden der $(n+1)$ -ten Schnur in die Hand nehmen. Unter den insgesamt $2n+1$ möglichen Verknotungen führen $2n$ zu *keinem* Ring, sondern eliminieren nur eine Schnur für weitere Verknotungen. Eine Verknotung, nämlich die mit dem anderen Ende der $(n+1)$ -ten Schnur, ergibt einen Ring, der zu den bei der Verknotung der restlichen n Schnüre entstehenden Ringen hinzukommt. Diese Überlegungen münden in der für jedes $n \geq 2$ und jedes k mit $k = 1, \dots, n+1$ geltenden Rekursionsformel

$$p_{n+1,k} = \frac{2n}{2n+1} p_{n,k} + \frac{1}{2n+1} p_{n,k-1}. \quad (2)$$

Dabei haben wir für jedes n $p_{n,0} := 0$ sowie $p_{n,n+1} := 0$ gesetzt.

Die obige Rekursionsformel ergibt für den Fall $n = 4$ die Wahrscheinlichkeiten

$$p_{4,1} = \frac{48}{105}, p_{4,2} = \frac{44}{105}, p_{4,3} = \frac{12}{105}, p_{4,4} = \frac{1}{105}.$$

Formel (2) bedeutet geometrisch, dass man ausgehend vom Stabdiagramm der Verteilung von R_n wie folgt dasjenige von R_{n+1} erhält: Man staucht die Stäbchenhöhen $p_{n,k}$ zum einen mit dem Faktor $2n/(2n+1)$, zum anderen mit dem Faktor $1/(2n+1)$. Das $2n/(2n+1)$ -gestauchte Stabdiagramm belässt man, das andere verschiebt man um Eins nach rechts und addiert die Stäbchenhöhen zu den belassenen hinzu. Auf diese Weise entsteht eine „Mischung“ der Verteilungen von R_n und R_{n+1} mit den Mischungsfaktoren $2n/(2n+1)$ bzw. $1/(2n+1)$.

Abb. 1 zeigt das Stabdiagramm der Verteilung von R_{50} . Die Wahrscheinlichkeit für drei Ringe beträgt hier 0,2896, etwas unwahrscheinlicher ist mit

0,2840 der Fall von zwei Ringen. Die Wahrscheinlichkeit, mehr als acht Ringe zu erhalten, ist kleiner als 0,0004.

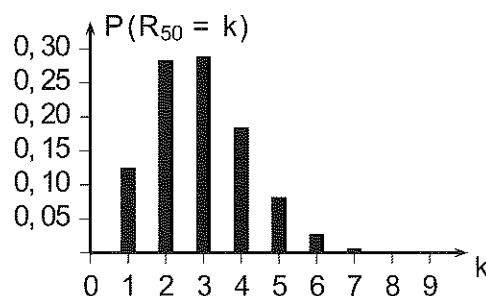


Abb. 1: Stabdiagramm der Verteilung von R_{50}

Da der Nenner bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten $p_{n,k}$ gleich dem Produkt $1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)$ ist, ist mit der Festsetzung

$$P(R_n = k) =: \frac{r_{n,k}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}$$

das Äquivalent von (2) für die ganzen Zahlen $r_{n,k}$ durch

$$r_{n+1,k} = 2nr_{n,k} + r_{n,k-1} \quad (3)$$

für $n \geq 2$ und $k = 1, \dots, n+1$ und den Festsetzungen $r_{n,0} := r_{n,n+1} := 0$ gegeben. Die Anfangsbedingungen für die $r_{n,k}$ sind

$$r_{2,1} = 2, r_{2,2} = 1. \quad (4)$$

Tabelle 1 enthält die (für $n = 2, n = 3$ und $n = 4$ schon oben hergeleiteten) Werte $r_{n,k}$ für $n \leq 7$. Wir werden später sehen, dass die $r_{n,k}$ über die Beziehung

$$r_{n,k} = 2^{n-k} S_n(k) \quad (5)$$

mit den *Stirling-Zahlen erster Art* $S_n(k)$ zusammenhängen (siehe Abschnitt 6).

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7
2	2	1					
3	8	6	1				
4	48	44	12	1			
5	384	400	140	20	1		
6	3840	4384	1800	349	30	1	
7	46080	56448	25984	5880	700	42	1

Tabelle 1: Die Zahlen $r_{n,k}$

3 Modellierung von R_n als Trefferanzahl

Obwohl der oben durchgeführte rekursive Ansatz auf den ersten Blick kaum dazu taugt, eine einfache geschlossene Formel für $E(R_n)$ anzugeben oder das asymptotische Verhalten von R_n für großes n zu beschreiben, steckt in ihm doch eine Erkenntnis, die jetzt ausführlicher beleuchtet werden soll.

Führt man für $j = 1, \dots, n$ die Ereignisse

$$A_j := \{\text{die } j\text{-te Verknotung führt zu einem Ring}\}$$

ein, so stellt sich die zufällige Anzahl R_n der Ringe als Summe

$$R_n = \mathbf{1}_{A_1} + \dots + \mathbf{1}_{A_n} \quad (6)$$

von Indikatorvariablen dar. Dabei ist $\mathbf{1}_{A_j}$ gleich 1 gesetzt, falls das Ereignis A_j eintritt; andernfalls ist die Indikatorvariable $\mathbf{1}_{A_j}$ gleich 0 (siehe z.B. Henze (2010), Kapitel 3).

Die zentrale Erkenntnis ist nun, dass die Ereignisse A_1, \dots, A_n stochastisch unabhängig sind und die Wahrscheinlichkeiten

$$P(A_j) = \frac{1}{2(n-j)+1}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (7)$$

besitzen. Hiermit lassen sich alle Verteilungsaussagen über R_n mehr oder weniger direkt ableiten.

Man kann sich somit den für die Entstehung der Anzahl R_n der Teilringe wirkenden Zufall so vorstellen, dass wie bei einer Bernoulli-Kette unabhängige Versuche vorliegen, die jeweils einen Treffer oder eine Niete ergeben. Dabei sehen wir es als *Treffer* an, wenn ein Ring entsteht; andernfalls liegt eine *Niete* vor. Im Unterschied zur Bernoulli-Kette, in der die Trefferwahrscheinlichkeit über die verschiedenen Versuche gleich bleibt und folglich die Trefferanzahl eine Binomialverteilung besitzt, haben wir es hier mit Trefferwahrscheinlichkeiten zu tun, die von Versuch (Verknotung) zu Versuch zunehmen. Dabei besitzt die letzte Verknotung die Trefferwahrscheinlichkeit 1.

Um die stochastische Unabhängigkeit von A_1, \dots, A_n und (7) einzusehen, betrachten wir zunächst den Fall $j = 1$. Hier ist (7) offensichtlich, ist doch – ganz gleich, welches der $2n$ Schnur-Enden man zuerst in die Hand nimmt, die Wahrscheinlichkeit, dass man „einen Treffer landet“, also einen Ring erhält, gleich $1/(2n-1)$, denn nur eines der gleich wahrscheinlichen Schnur-Enden ist hierfür günstig. Die entscheidende Erkenntnis beginnt schon bei der Bestimmung von $P(A_2)$: Hat die erste Verknotung einen Treffer im obigen Sinn ergeben, so liegen $n-1$ Schnüre für weitere Verknotungen vor; man kann den ersten Ring gedanklich wegnehmen. Hat die erste Verknotung keinen Treffer ergeben, so liegen ebenfalls $n-1$ Schnüre vor, nur ist eine dieser Schnüre jetzt doppelt so lang wie die anderen. Die Wahrscheinlichkeit, bei der zweiten Verknotung einen Treffer zu landen, also einen Ring zu erhalten, ist – ganz egal, mit

welchem der $2(n-1)$ Schnur-Enden man beginnt – gleich $1/(2(n-1)-1)$. Es gilt also (7) für $j = 2$.

Obige Überlegung zeigt auch, dass die Ereignisse A_1 und A_2 stochastisch unabhängig sind. Ganz allgemein liegen im Fall $j \geq 2$ vor der j -ten Verknotung – unabhängig davon, welche vorherigen Verknotungen Ringe ergeben haben oder nicht – noch $2(n-j)+2$ Enden vor. Nach rein zufälliger Wahl eines dieser Enden ist die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer gleich $P(A_j) = 1/(2(n-j)+1)$. Diese Einsicht liefert neben der Gültigkeit von (7) auch die stochastische Unabhängigkeit von A_1, \dots, A_n .

Da sich ein einziger Ring genau dann ergibt, wenn keines der Ereignisse A_1, \dots, A_{n-1} und somit jedes der komplementären Ereignisse A_1^c, \dots, A_{n-1}^c eintritt, folgt wegen der Unabhängigkeit

$$P(R_n = 1) = \prod_{j=1}^{n-1} P(A_j^c) = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{2(n-j)}{2(n-j)+1}$$

und damit das schon aus Prochno und Schmitz (2013) bekannte Ergebnis (1).

4 Erwartungswert und Varianz von R_n

Da die Indikatorvariable $\mathbf{1}_A$ eines Ereignisses A den Erwartungswert

$$E(\mathbf{1}_A) = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot P(A^c) = P(A)$$

besitzt, folgt wegen der Additivität der Erwartungswertbildung (siehe z.B. Henze (2010), Kapitel 12) aus Darstellung (6) die Gleichung

$$\begin{aligned} E(R_n) &= \sum_{j=1}^n P(A_j) \\ &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}. \end{aligned}$$

Diese bestätigt insbesondere die schon in den Fällen $n = 2$ und $n = 3$ erhaltenen Ergebnisse. Bezeichnet allgemein

$$H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}$$

die k -te *harmonische Zahl*, so gilt

$$E(R_n) = H_{2n} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{2j} = H_{2n} - \frac{1}{2} H_n.$$

Ein Vergleich des als Summe von Rechteckflächen deutbaren Ausdrucks H_k mit den Integralen $\int_1^k x^{-1} dx$ und $\int_0^k (x+1)^{-1} dx$ ergibt die Abschätzungen

$$\ln(k+1) \leq H_k \leq 1 + \ln k.$$

Genauer ist die Approximation

$$H_k \approx \ln k + \gamma \quad (8)$$

mit der Euler-Mascheronischen Konstanten $\gamma = 0,57721 \dots$. Dabei konvergiert die Differenz der beiden Seiten von (8) für $k \rightarrow \infty$ sogar gegen Null (Heuser (1994), S. 185). Mit obiger Approximation folgt

$$\begin{aligned} E(R_n) &\approx \ln(2n) + \gamma - \frac{1}{2}(\ln n + \gamma) \\ &= \frac{1}{2} \ln n + \ln 2 + \frac{\gamma}{2} \\ &\approx \frac{1}{2} \ln n + 0,98175 \\ &= \ln \sqrt{n} + 0,98175. \end{aligned}$$

Tabelle 2 zeigt, wie gut obige Approximation schon für kleine Werte von n ist. Viel überraschender ist jedoch, dass der Erwartungswert von R_n nur sehr langsam mit n wächst. Selbst bei einer Million Schnüren stellen sich im Mittel weniger als acht Ringe ein. Diese Erkenntnis steht ganz im Einklang mit der in Prochno und Schmitz (2013) gemachten Beobachtung, dass die Wahrscheinlichkeit für nur einen Ring erstaunlich hoch ist.

	exakt	Approximation
3	1,533	1,531
4	1,676	1,675
5	1,787	1,786
10	2,183	2,183
20	2,480	2,480
50	2,988	2,988
100	3,284	3,284
1000	4,436	4,436
10^6	7,890	7,890
10^9	11,343	11,343

Tabelle 2: Erwartungswert von R_n

Da die Ereignisse A_1, \dots, A_n stochastisch unabhängig sind, ist die Varianz $V(R_n)$ von R_n gleich der Summe der Varianzen der $\mathbf{1}_{A_j}$ (Henze (2010), Kapitel 22). Weil eine Indikatorvariable $\mathbf{1}_A$ nur die Werte 1 und 0 annehmen kann, stimmt sie mit ihrem Quadrat überein, und es folgt

$$\begin{aligned} V(\mathbf{1}_A) &= E(\mathbf{1}_A^2) - (E(\mathbf{1}_A))^2 \\ &= E(\mathbf{1}_A) - P(A)^2 \\ &= P(A) - P(A)^2. \end{aligned}$$

Aus $E(R_n) = \sum_{j=1}^n P(A_j)$ und (6) folgt dann

$$\begin{aligned} V(R_n) &= E(R_n) - \sum_{j=1}^n \frac{1}{(2(n-j)+1)^2} \\ &= E(R_n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \approx 1,2337$$

(siehe z.B. Heuser (2004)) ist die Varianz nur wenig kleiner als der Erwartungswert; es gilt

$$E(R_n) - 1,2337 \leq V(R_n) \leq E(R_n). \quad (9)$$

5 Das Verhalten von R_n für $n \rightarrow \infty$

Ein grundlegendes Resultat der Wahrscheinlichkeitstheorie besagt, dass Summen unabhängiger Zufallsvariablen bei wachsender Anzahl von Summanden unter gewissen Voraussetzungen asymptotisch normalverteilt sind, also wie im Fall einer Bernoulli-Kette für die Zahl der Treffer ein Zentraler Grenzwertsatz gilt (im Fall der Bernoulli-Kette ist dieser Grenzwertsatz mit den Namen de Moivre und Laplace verknüpft). Eine hinreichende Bedingung hierfür geht auf Ljapunov zurück (siehe z.B. Klenke, A. (2006), S. 305).

Im vorliegenden Fall wäre die Anzahl R_n der Ringe nach Standardisierung, also die Zufallsvariable

$$\tilde{R}_n := \frac{R_n - E(R_n)}{\sqrt{V(R_n)}},$$

für $n \rightarrow \infty$ asymptotisch standard-normalverteilt, wenn mit den Abkürzungen

$$V_j := \mathbf{1}_{A_j}, \quad c_j := P(A_j) = \frac{1}{2(n-j)+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(V(R_n))^2} \sum_{j=1}^n E(V_j - c_j)^4 = 0 \quad (10)$$

erfüllt ist. Dass die Konvergenz (10) in der Tat besteht, ergibt sich, indem man

$$(V_j - c_j)^4 = V_j^4 - 4c_j V_j^3 + 6c_j^2 V_j^2 - 4c_j^3 V_j + c_j^4$$

ausrechnet, die negativen Terme auf der rechten Seite durch 0 nach oben abschätzt und die Gleichung $V_j^2 = V_j$ ($= V_j^3 = V_j^4$) beachtet. Wegen $E(V_j) = c_j$ und $c_j \leq 1$ folgt dann

$$E(V_j - c_j)^4 \leq c_j + 6c_j^2 + c_j^4 \leq 8c_j$$

und somit

$$\sum_{j=1}^n E(V_j - c_j)^4 \leq 8 \sum_{j=1}^n c_j = 8E(R_n).$$

Mit (9) erhalten wir

$$\frac{1}{(V(R_n))^2} \sum_{j=1}^n E(V_j - c_j)^4 \leq \frac{8E(R_n)}{(E(R_n) - 1,2237)^2}$$

und folglich (10), da $\lim_{n \rightarrow \infty} E(R_n) = \infty$.

6 Abschließende Bemerkungen

1. Es seien Ω die Menge aller Permutationen (a_1, \dots, a_{2n}) der Zahlen $1, \dots, 2n$ und

$$B_j = \left\{ (a_1, \dots, a_{2n}) \in \Omega : a_j = \max_{i=1, \dots, j} a_i \right\}$$

die Menge derjenigen Permutationen, die in der j -ten Komponente einen *Rekord* aufweisen. Denkt man sich a_1, a_2, \dots, a_{2n} wie Karten nacheinander aufgedeckt, so tritt B_j ein, wenn die j -te Zahl einen Rekord liefert, also a_j unter den bis dahin aufgedeckten Zahlen die größte ist. Die Anzahl

$$X_{2n} = \mathbf{1}_{B_1} + \dots + \mathbf{1}_{B_{2n}}$$

der Rekorde in einer rein zufälligen Permutation der Zahlen $1, 2, \dots, 2n$ ist eine Summe von unabhängigen Indikatorvariablen $\mathbf{1}_{B_1}, \dots, \mathbf{1}_{B_{2n}}$, wobei $P(B_j) = 1/j$, $j = 1, \dots, 2n$ (siehe Henze (2008) oder Henze (2010), Kapitel 12). Mit (6) folgt, dass R_n die gleiche Verteilung besitzt wie die Summe

$$\mathbf{1}_{B_1} + \mathbf{1}_{B_3} + \dots + \mathbf{1}_{B_{2n-1}},$$

also die Anzahl der Rekorde in einer rein zufälligen Permutation der Zahlen $1, \dots, 2n$ zu *ungeraden Zeitpunkten*. Am Rande sei bemerkt, dass die Zahl der Rekorde in einer rein zufälligen Permutation die gleiche Verteilung besitzt wie die Anzahl der Zyklen (siehe z.B. Blom, G., Holst, L., und D. Sandell (1994), S. 65ff.).

2. Die über die Rekursionsformel (3) und die Anfangsbedingung (4) definierte Zahl $r_{n,k}$ ergibt sich als Koeffizient von x^k nach Ausmultiplizieren des Ausdrucks

$$x(x+2)(x+4) \dots (x+2n-2).$$

So erhält man etwa für $n = 4$

$$x(x+2)(x+4)(x+6) = 48x + 44x^2 + 12x^3 + x^4$$

(vgl. die dritte Zeile in Tabelle 1). Die in (5) angegebene Beziehung zwischen $r_{n,k}$ und der Stirling-Zahl $S_n(k)$ ergibt sich unmittelbar aus der Definition von $S_n(k)$ über die Gleichung

$$x(x+1)(x+2) \dots (x+n-1) = \sum_{k=1}^n S_n(k) x^k$$

(siehe z.B. Blom, G., Holst, L., und D. Sandell (1994), S. 68). Ersetzt man hier x durch $x/2$, so folgt

$$\frac{1}{2^n} \prod_{j=0}^{n-1} (x+2j) = \sum_{k=1}^n S_n(k) 2^{-k} x^k$$

und somit

$$\prod_{j=0}^{n-1} (x+2j) = \sum_{k=1}^n S_n(k) 2^{n-k} x^k,$$

also (5).

3. Färbt man das eine Ende jeder Schnur rot und das andere grün und vereinbart, dass grundsätzlich nur rote und grüne Enden miteinander verknotet werden dürfen, so vergrößert sich offenbar die Aussicht, geschlossene Ringe zu erhalten. Bezeichnet D_j das Ereignis, dass die j -te rein zufällige Verknotung einen Ring liefert, so sind mit den gleichen Überlegungen wie oben die Ereignisse D_1, \dots, D_n stochastisch unabhängig, und es gilt $P(D_j) = 1/(n+1-j)$ für $j = 1, \dots, n$. Die Anzahl

$$S_n = \mathbf{1}_{D_1} + \dots + \mathbf{1}_{D_n}$$

der entstehenden Ringe hat dann die gleiche Verteilung wie die in Henze (2008) behandelte Anzahl der Rekorde in einer rein zufälligen Permutation der Zahlen $1, 2, \dots, n$.

7 Zusammenfassung

Verknotet man die Enden von n Schnüren rein zufällig miteinander, so entsteht mit verblüffend hoher Wahrscheinlichkeit ein einziger Ring (Prochno und Schmitz (2013)). In diesem Aufsatz wird in nahe liegender Verallgemeinerung hierzu die Verteilung der Anzahl R_n der entstehenden Ringe bestimmt. Hierbei treten die Stirling-Zahlen erster Art auf. Über eine Darstellung von R_n als Summe stochastisch unabhängiger Indikatorvariablen ergeben sich Erwartungswert und Varianz von R_n sowie ein zentraler Grenzwertsatz für R_n beim Grenzübergang $n \rightarrow \infty$.

Die Verteilung von R_n ist die gleiche wie die Verteilung der Anzahl der Rekorde in einer rein zufälligen Permutation der Zahlen $1, 2, \dots, 2n$, wenn man nur die Rekorde zu ungeraden Zeitpunkten zählt.

Sicherlich werden im Schulunterricht nur die Ausführungen der Abschnitte 2 (exakte Verteilung, Rekursionsformel, Tabellenkalkulation!) und 3 (Darstellung von R_n als Summe von „Treffer/Niete-Variablen“ von unabhängigen Ereignissen) und die daraus resultierende Formel für den Erwartungswert behandelt werden können. Die darüber hinaus gehenden Betrachtungen sind höhere Gesichtspunkte, die eine Lehrkraft in der gymnasialen Oberstufe idealerweise kennen sollte.

8 Danksagung

Der Autor dankt den beiden Gutachtern für diverse Verbesserungsvorschläge.

Literatur

Blom, G., Holst, L., und D. Sandell (1994): Snapshots from the world of probability. Verlag Sprin-

ger, New York.

Henze, N. (2008): Rekorde. MU 1 (2008), 16-23.

Henze, N. (2012): Stochastik für Einsteiger. 9. Auflage. Verlag Vieweg+Teubner, Wiesbaden.

Heuser, H. (1994): Lehrbuch der Analysis, Teil 1. 11. Auflage, Verlag Teubner, Stuttgart.

Heuser, H. (2004): Lehrbuch der Analysis, Teil 2. 13. Auflage, Verlag Teubner, Stuttgart.

Klenke, A. (2006): Wahrscheinlichkeitstheorie. Verlag Springer, Berlin, Heidelberg.

Prochno, J. und Schmitz, M. (2013): Ein erstaunliches Schnur-Orakel. Stochastik in der Schule 33, Band 1, 2-7.

Anschrift des Verfassers

Prof. Dr. Norbert Henze

Institut für Stochastik

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Kaiserstr. 89-93

76131 Karlsruhe

Henze@kit.edu

Eine neue Modellierung für benachbarte Zahlen beim Lotto

GERD RIEHL, BARSINGHAUSEN

Zusammenfassung: Die Frage, wie wahrscheinlich es ist, dass von den sechs Zahlen einer Lottoziehung mindestens zwei benachbart sind, sowie einige Verallgemeinerungen dazu haben kürzlich Daume und Schmitz (2013) sehr ausführlich in SiS behandelt. Sie regten dabei an, zunächst kleinere Beispiele in einer Art Mini-Lotto zu untersuchen. Mein Beitrag greift diesen Vorschlag auf. Die beim Mini-Lotto gewonnenen Ergebnisse eröffnen dann in Verbindung mit einer etwas veränderten Modellierung des zugrunde liegenden Zufallsexperiments einen recht einfachen Weg zur Lösung des allgemeinen Problems ohne die von Daume und Schmitz genannten Schwierigkeiten.

1 Einleitung

Die oben erwähnten Schwierigkeiten traten auf, sobald man das Ereignis „mindestens zwei benachbarte Zahlen“ auf „genau zwei benachbarte Zahlen“ reduzierte bzw. zu „mindestens drei benachbarte Zahlen“ verallgemeinerte.

Im zweiten Abschnitt werden die Zufallsvariable und das Urnenmodell vorgestellt, mit denen ich das Pro-

blem im Unterricht ohne die genannten Schwierigkeiten bearbeitet habe.

Mithilfe des neuen Modells behandeln wir dann in Abschnitt 3 die verschiedenen Mini-Lottos mit nur fünf Kugeln.

Im vierten Abschnitt übertragen wir dieses Vorgehen auf das „große“ Lotto mit 49 Kugeln, wobei sich überraschend die Ergebnisse der Mini-Lottos als wesentlicher Baustein zur Lösung erweisen.

2 Eine neue Modellierung

Zunächst präzisieren wir die sprachlich ungenaue Bezeichnung *benachbart*, denn *Nachbar* kann ja sowohl „Vorgänger“ wie „Nachfolger“ bedeuten. Sinnvoller ist es anzugeben, ob eine gezogene Zahl unmittelbar auf eine andere Zahl dieser Ziehung folgt. Als Zufallsvariable Y wählen wir die Anzahl derartiger Nachfolger innerhalb einer Ziehung; diese kann beim Lotto «6 aus 49» offenbar die Werte $0 \leq Y \leq 5$ annehmen.

Die „Ersatzurne“ für «6 aus 49» von Daume und Schmitz mit 44 nummerierten Kugeln ergänzen wir