Zwischen Angst und Gier: Die Sechs verliert

NORBERT HENZE, KARLSRUHE

Zusammenfassung: *Bei einem Würfelspiel geht es darum, möglichst viele Augen zu sammeln, wobei man beim Auftreten einer Sechs alles verliert. In diesem Beitrag werden zwei nahe liegende Spielstrategien untersucht und verglichen.*

1 Einleitung

Bei einem Würfelspiel (das durch die Sendung „Schlag den Raab!“ am 24. Mai 2009 große Bekanntheit erreichte) wird ein fairer Würfel wiederholt geworfen. Solange keine Sechs auftritt, werden die erzielten Augenzahlen auf ein Punktekonto addiert. Das Spiel kann jederzeit gestoppt werden; der erzielte Punktestand ist dann der Gewinn (in Euro). Kommt eine Sechs, fällt man auf 0 Punkte zurück und gewinnt nichts.. Würfelt man etwa 4,5,2,2 und stoppt dann, so beträgt der Gewinn 13 Euro. Bei der Sequenz 3,1,6 geht man leer aus, da nach den ersten beiden Würfen das Spiel nicht beendet wurde. Welche Stoppstrategie sollte verfolgt werden, wenn man das Spiel oft wiederholt spielen müsste?

2 Die „k-mal würfeln“-Strategie

Die meisten Studenten, mit denen ich dieses Problem diskutiert habe, wollten nicht mehr als drei oder vier Mal würfeln und dann aufhören. Das Argument war stets das Gleiche: „Die erste Sechs wird ja irgendwann kommen; wenn ich drei oder vier Mal Glück hatte und keine Sechs auftrat, möchte ich dieses Glück nicht noch weiter strapazieren.“

Da das Spiel oft gespielt werden soll, bietet sich als Gütekriterium für eine Spielstrategie der Erwartungswert des zufälligen Spielgewinns G an. Wir betrachten in diesem Abschnitt die Strategie, k mal zu würfeln, und interessieren uns insbesondere für dasjenige k, welches den Erwartungswert von G maximiert. Der Kürze halber bezeichne A das Ereignis, k mal hintereinander keine Sechs zu würfeln. Tritt in den ersten k Würfen mindestens eine Sechs auf und somit das komplementäre Ereignis $\overline{A}$ ein (dies geschieht mit der Wahrscheinlichkeit $1-(5/6)^k$), so geht man leer aus; der Spielgewinn G nimmt dann den Wert 0 an.

Hat man Glück und würfelt k mal hintereinander keine Sechs, tritt also A ein, so stellt sich G als Summe $X_1+\ldots+X_k$ von Zufallsvariablen dar, wobei X_j die Augenzahl des j-ten Wurfs angibt. Unter der Bedingung, dass keine Sechs auftritt, nimmt jedes X_j die Werte 1, 2, 3, 4, 5 mit gleicher (bedingter) Wahrscheinlichkeit 1/5 an. Der Erwartungswert von X_j ist also $(1+2+3+4+5)/5 = 3$, und der Erwartungswert von G (ebenfalls unter dieser Bedingung!) gleich $k \cdot 3$. Da das bedingende Ereignis A mit der Wahrscheinlichkeit $P(A) = (5/6)^k$ eintritt, ist der Erwartungswert des Spielgewinns unter der Strategie, k mal zu würfeln, gleich

$$E_k(G) = k \cdot 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^k.$$

Dabei haben wir die Abhängigkeit des Erwartungswertes von k durch Indizierung hervorgehoben.

Um dasjenige k zu bestimmen, das $E_k(G)$ maximiert, bildet man am einfachsten den Quotienten

$$\frac{E_{k+1}(G)}{E_k(G)} = \frac{k+1}{k} \cdot \frac{5}{6}.$$

Dieser ist genau dann größer (bzw. kleiner) als 1, wenn $k < 5$ (bzw. $k > 5$) gilt. Ferner gilt $E_5(G) = E_6(G)$. Die beste „k-mal würfeln“- Strategie erfordert also, fünf oder sechs Mal zu würfeln, und der Erwartungswert des Spielgewinns beträgt dann (aufgerundet) 6.03 Euro (Tabelle 1).

k	$E_k(G)$	k	$E_k(G)$
1	2.500	5	6.028
2	4.167	6	6.028
3	5.208	7	5.861
4	5.787	8	5.582

Tabelle 1: $E_k(G)$ für verschiedene Werte von k

3 Die „k-Augen-sammeln“- Strategie

Es liegt nahe, eine Entscheidung zwischen Weiterwürfeln und Stoppen vom erreichten Punktestand und nicht wie in Abschnitt 2 von der Anzahl der Spiele, die man ohne Sechs überstanden hat, abhängig zu machen, denn die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs wird ja nicht größer, je länger diese ausgeblieben ist (stochastische Unabhängigkeit!). Einige der Studierenden meinten hier, mit 9 oder 10 Augen sollte man stoppen und ein neues Spiel beginnen.

Wir betrachten im Folgenden die Strategie, so lange zu würfeln, bis man mindestens k Augen erreicht hat, und dann aufzuhören. Welchen Erwartungswert besitzt der zufällige Spielgewinn G bei dieser Stoppregel? Fahren wir damit – zumindest für ein geeignetes k – besser als mit der Strategie, fünf mal zu würfeln, die uns im Schnitt 6,03 Euro pro Spiel einbringt?

Als Grundraum Ω, auf dem G als Zufallsvariable definiert ist, bietet sich die Menge aller denkbaren Wurfsequenzen ω bis zum Spielende an. Diese haben die Höchstlänge k (die erreicht wird, falls $k-1$ mal in Folge eine Eins auftritt) und enthalten entweder nur am Ende eine Sechs (dann gilt $G(\omega)=0$) oder keine Sechs. Im letzteren Fall ist ω von der Gestalt $\omega = a_1a_2\ldots a_l$ mit $l \geq k/5$. Diese Minimallänge wird u.a. erreicht, falls (mit der eventuellen Ausnahme eines Wurfs) nur Fünfen gewürfelt werden. Außerdem gelten $a_1+\ldots+a_l \geq k$ sowie $a_1+\ldots+a_{l-1} < k$. In diesem Fall nimmt $G(\omega)$ den Wert $a_1+\ldots+a_l$ an. Die Abhängigkeit des Grundraums Ω und des Wahrscheinlichkeitsmaßes P von k wird in der Notation unterdrückt.

Prinzipiell lässt sich der (in Unterscheidung zu der in Abschnitt 1 diskutierten Stoppregel mit $\tilde{E}_k(G)$ bezeichnete) Erwartungswert von G über die Definition

$$\tilde{E}_k(G) = \sum_{\omega\in\Omega} G(\omega)\cdot P(\{\omega\})$$

(Henze (2010), Kapitel 12) berechnen. Aufgrund der großen Zahl an Spielverläufen ist hierfür jedoch ein Computerprogramm erforderlich. Einfacher geht es, wenn man den Erwartungswert von G *in Abhängigkeit vom erreichten Punktestand* n betrachtet. Mathematisch handelt es sich um den mit $\tilde{E}_{k,n}(G)$ abgekürzten *bedingten Erwartungswert* von G unter demjenigen Ereignis $A_n \subset \Omega$, das aus allen ω besteht, die zu einem Punktestand von n führen. So enthält etwa A_3 alle Sequenzen $a_1a_2\ldots a_l$, die mit 3, 21, 12 oder 111 beginnen. Wenn wir formal $A_0 := \Omega$ setzen, läuft n hierbei von 0 bis $k+4$. Der maximale Wert $k+4$ wird erreicht, wenn man mit $k-1$ Punkten eine Fünf würfelt. Nach Definition gilt offenbar $\tilde{E}_k(G) = \tilde{E}_{k,0}(G)$.

Da man mit mindestens k Punkten stoppt und diese Punktzahl als Gewinn erhält, gilt

$$\tilde{E}_{k,n}(G) = n, \quad \text{falls } n \in \{k, k+1, \ldots, k+4\}. \qquad (1)$$

Für $n \leq k-1$ betrachten wir das zufällige Ergebnis X des nächsten Wurfs. Die Formel vom totalen Erwartungswert (siehe Humenberger (2000) oder Henze (2001)), angewendet auf $\tilde{E}_{k,n}(G)$, besagt

$$\tilde{E}_{k,n}(G) \;=\; \sum_{j=1}^{6} \tilde{E}_{k,n}(G|X=j)\cdot P(X=j). \qquad (2)$$

Da man mit einer Sechs alles verliert, gilt $\tilde{E}_{k,n}(G|X=6)=0$. Im Fall $X=j$ mit $j\leq 5$ erhält man j weitere Punkte, es gilt also $\tilde{E}_{k,n}(G|X=j) = \tilde{E}_{k,n+j}(G)$. Wegen $P(X=j) = 1/6$ ($j=1,\ldots,6$) wird dann (2) zu

$$\tilde{E}_{k,n}(G) \;=\; \frac{1}{6}\cdot\sum_{j=1}^{5}\tilde{E}_{k,n+j}(G). \qquad (3)$$

Zusammen mit (1) lässt sich jetzt $\tilde{E}_{k,0}(G)$ durch „Rückwärts-Induktion“ gemäß

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{k,k-1}(G) &= \frac{k+(k+1)+\ldots+(k+4)}{6} = \frac{5k+10}{6}, \\ \tilde{E}_{k,k-2}(G) &= \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5k+10}{6} + k + (k+1) + \ldots + (k+3)\right) \end{aligned}$$

usw. berechnen (Tabellenkalkulation). Tabelle 2 zeigt die am Ende erhaltenen Werte $\tilde{E}_k(G) = \tilde{E}_{k,0}(G)$ für verschiedene Start-Werte von k.

k	$\tilde{E}_k(G)$	k	$\tilde{E}_k(G)$
8	5.318	15	6.154
9	5.550	16	6.154
10	5.744	17	6.133
11	5.896	18	6.094
12	6.003	19	6.040
13	6.081	20	5.971
14	6.130	21	5.889

Tabelle 2: Erwartungswerte $\tilde{E}_k(G)$ unter der k-Augen-sammeln-Strategie

Tabelle 2 zeigt, dass die „k-Augen-sammeln“-Strategie für $k \in \{13, 14, \ldots, 19\}$ zu einem höheren erwarteten Spielgewinn führt als die beste „k-mal-würfeln“-Stoppregel. Der maximale, auf zwei Nachkommastellen gerundete Erwartungswert 6.15 wird für $k=15$ oder $k=16$ erreicht. Warum sich gerade diese Werte für k empfehlen, wird klar, wenn man sich in die Situation eines Spielers versetzt, der gerade k Augen auf seinem Punktekonto verzeichnet und überlegt, ob er stoppen oder weiter spielen soll.

Hierzu betrachten wir den Erwartungswert des mit Y_k bezeichneten Punktestandes nach einem möglichen weiteren Wurf. Da Y_k die Werte $k+1, \ldots, k+5$ und 0 jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/6$ annimmt, gilt

$$E(Y_k) \;=\; \frac{1}{6}\cdot\sum_{j=1}^{5}(k+j) \;=\; \frac{5\cdot k+15}{6}.$$

Weiterwürfeln würde sich lohnen, falls die Ungleichung $E(Y_k) > k$ erfüllt ist, und dies ist gleichbedeutend mit $k < 15$. Wegen $E(Y_k) = k \iff k = 15$ verschlechtert auch ein Warten bis zum Mindestpunktestand 16 nichts, was sich letztlich in der Gleichheit der Werte $\tilde{E}_{15}(G)$ und $\tilde{E}_{16}(G)$ äußert. Also lautet die unter dem Gesichtspunkt der Maximierung des Erwartungswertes bestmögliche Strategie: „Spiele weiter, wenn der Punktestand kleiner ist als 15, sonst stoppe und kassiere den Gewinn!

4 Die Verteilung von G

Wir haben bislang nur den *Erwartungswert* des Spielgewinns G unter zwei verschiedenen Stoppregeln untersucht. In diesem Abschnitt geben wir die Verteilungen von G unter diesen Stoppregeln an.

4.1 Verteilung von G unter der „k-mal würfeln“-Stoppregel

Bezeichnet wie in Abschnitt 2 A das Ereignis, k mal hintereinander keine Sechs zu würfeln, so stellt sich der zufällige Spielgewinn G in der Form

$$G = \mathbf{1}\{A\} \cdot \sum_{j=1}^{k} X_j$$

dar. Hierbei ist $\mathbf{1}\{A\}$ die durch $\mathbf{1}\{A\}(\omega) := 1$, falls $\omega \in A$ ($\mathbf{1}\{A\}(\omega) := 0$, sonst) definierte Indikatorfunktion von A (s. Henze (2010), Kapitel 3), und $X_1, \ldots, X_k$ sind (auch von $\mathbf{1}\{A\}$) unabhängige Zufallsvariablen, die die Werte 1 bis 5 mit gleicher Wahrscheinlichkeit $1/5$ annehmen. Offenbar gilt $P(G=0) = 1 - P(A) = 1 - (5/6)^k$. Tritt A ein, so ist die (bedingte) Verteilung von G diejenige einer Augensumme beim k-fachen Wurf mit einem „fünfseitigen echten Würfel“, dessen Seiten von 1 bis 5 beschriftet sind. Es gilt also

$$P(G = i|A) \ = \ P\left(\sum_{j=1}^{k} X_j = i\right)$$

und somit für $i \in \{k, k+1, \ldots, 5k\}$

$$P(G = i) \ = \ \left(\frac{5}{6}\right)^k \cdot P\left(\sum_{j=1}^{k} X_j = i\right).$$

Für den Spezialfall $k = 5$, der zum größtmöglichen Erwartungswert unter allen „k-mal würfeln“-Stoppregeln führt, ist die Verteilung von G in Tabelle 3 aufgeführt. Die hierbei benötigten günstigen Fälle, beim fünffachen Wurf mit einem „fünfseitigen Würfel“ eine bestimmte Augensumme zu erreichen, erhält man am einfachsten unter Zuhilfenahme eines Computers durch Anlegen eines zu Beginn zu Null gesetzten Feldes $(a(5), a(6), \ldots, a(25))$. Sodann lässt man 5 Indizes $i1, \ldots, i5$ unabhängig voneinander von 1 bis 5 laufen und erhöht jeweils das Feldelement $a(i1 + \ldots + i5)$.

i	$P(G=i)$	i	$P(G=i)$
0	0.5981	10	0.01556
5	$1.286 \cdot 10^{-4}$	11	0.02379
6	$6.430 \cdot 10^{-4}$	12	0.03279
7	$1.929 \cdot 10^{-3}$	13	0.04115
8	$4.501 \cdot 10^{-3}$	14	0.04694
9	$9.002 \cdot 10^{-3}$	15	0.04900

Tabelle 3: Verteilung des Spielgewinns unter der “5-mal-würfeln“- Stoppregel

Man beachte, dass die Wahrscheinlichkeiten $P(G = i)$ und $P(G = 30 - i)$ $(i = 5, \ldots, 14)$ aus Symmetriegründen gleich sind; es gilt also $P(G = 16) = P(G = 14) = 0.04694$ usw. Tabelle 3 zeigt, dass man mit der “5-mal-würfeln“- Stoppregel mit knapp 60-prozentiger Wahrscheinlichkeit leer ausgeht. Will man hier öfter einen Gewinn erzielen, so darf man nicht so häufig würfeln, was aber nach Tabelle 1 zu einer geringeren erwarteten Gewinnsumme führt.

4.2 Verteilung von G unter der „k Augen-sammeln“-Stoppregel

Mit der in Abschnitt 3 vorgestellten „Rückwärtsinduktions-Methode“ lässt sich auch die komplette Verteilung von G, d.h. die Wahrscheinlichkeiten $P_k(G = i)$, unter der k-Augen-sammeln-Strategie bestimmen. Unter dieser Stoppregel nimmt i die Werte 0, k, $k+1$, $k+2$, $k+3$ und $k+4$ an.

Bezeichnet $P_{k,n}(G = i)$ $(i \in \{0, k, k+1, \ldots, k+4\})$ die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass sich bei der k-Augen-sammeln-Strategie und einem momentanen Punktestand von n der Gewinn i ergibt, so gilt analog zu (1)

$$P_{k,n}(G = n) = 1, \quad \text{falls } n \in \{k, k+1, \ldots, k+4\}, \quad (4)$$

denn aufgrund der Stoppregel erhält man ja ab der Mindestaugenzahl k diese Augenzahl als Gewinn. Für $n \leq k-1$ betrachten wir wie in Abschnitt 3 das Ergebnis X des nächsten Wurfs. Die Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit (siehe Henze (2010)), Kap. 15), angewendet auf $P_{k,n}(G = i)$, besagt

$$P_{k,n}(G = i) \ = \ \sum_{j=1}^{6} P_{k,n}(G = i|X = j) \cdot P(X = j). \quad (5)$$

Da eine Sechs zum Gewinn 0 führt, gilt

$$P_{k,n}(G = 0|X = 6) \ = \ 1, \quad (6)$$
$$P_{k,n}(G = i|X = 6) \ = \ 0, \ i = k, \ldots, k+4. \quad (7)$$

Im Fall $X = j$ mit $j \leq 5$ erhält man j weitere Punkte, es gilt also $P_{k,n}(G = i | X = j) = P_{k,n+j}(G = i)$. Wegen $P(X = j) = 1/6$ ($j = 1, \ldots, 6$) wird dann (5) zu

$$P_{k,n}(G=0) = \frac{1}{6} \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^{5} P_{k,n+j}(G=0)\right), \quad (8)$$

$$P_{k,n}(G=i) = \frac{1}{6} \cdot \sum_{j=1}^{5} P_{k,n+j}(G=i) \quad (9)$$

($i = k, k+1, \ldots, k+4$). Mit (4) lässt sich jetzt $P_k(G = i) = P_{k,0}(G = i)$ durch „Rückwärts-Induktion“ aus (8), (9) berechnen. Tabelle 4 zeigt die Wahrscheinlichkeiten $P_{k,n}(G = i)$ ($i = 0, 15, 16, 17, 18, 19$) im Fall $k = 15$. Hier läuft n von 19 bis 0.

	0	15	16	17	18	19
19	0	0	0	0	0	1
18	0	0	0	0	1	0
17	0	0	0	1	0	0
16	0	0	1	0	0	0
15	0	1	0	0	0	0
14	.1667	.1667	.1667	.1667	.1667	.1667
13	.1944	.1944	.1944	.1944	.1944	.0278
12	.2269	.2269	.2269	.2269	.0602	.0324
11	.2647	.2647	.2647	.0980	.0702	.0378
10	.3088	.3088	.1421	.1143	.0819	.0441
9	.3602	.1936	.1658	.1334	.0956	.0515
8	.3925	.1981	.1656	.1278	.0837	.0323
7	.4256	.1987	.1608	.1167	.0653	.0330
6	.4586	.1940	.1498	.0984	.0661	.0331
5	.4909	.1822	.1307	.0984	.0654	.0323
4	.5213	.1611	.1288	.0958	.0627	.0304
3	.5481	.1557	.1226	.0895	.0572	.0268
2	.5741	.1486	.1155	.0832	.0528	.0259
1	.5988	.1402	.1079	.0776	.0507	.0248
0	.6222	.1313	.1009	.0741	.0481	.0234

Tabelle 4: Wahrscheinlichkeiten $P_{k,n}(G = i)$ ($i = 0, 15, 16, \ldots, 19$) im Fall $k = 15$

Man beachte, dass sich in Tabelle 4 in den mit 19 bis 15 beschrifteten Zeilen die Anfangsbedingungen (6) und (7) widerspiegeln. Die Gleichungen (8) und (9) besagen, dass sich der zu einem n mit $n \leq 14$ gehörende Wahrscheinlichkeitsvektor als eine mit dem Faktor 1/6 multiplizierte Linearkombination der 5 darüber liegenden Wahrscheinlichkeitsvektoren und des zum Verlust führenden Vektors $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$ ergibt.

Im Unterschied zu der besten „k-mal würfeln“-Stoppregel ($k = 5$, siehe Tabelle 3) verliert man bei der besten „k Augen sammeln“- Stoppregel sogar mit einer noch höheren, nämlich über 62-prozentigen Wahrscheinlichkeit. Dem steht jedoch eine pro Spiel um ca. 12 Cent höhere Gewinnerwartung gegenüber.

5 Schlussbemerkungen

Wir haben zwei unterschiedliche Regeln, eine Sequenz von kumulierten Augensummen beim wiederholten Würfelwurf bestmöglich zu stoppen, untersucht. Eher „ängstliche“ Vorgehensweisen, höchstens drei Mal zu würfeln oder bei einer erreichten Augensumme von 9 oder 10 Punkten zu stoppen, führen zu einer suboptimalen Gewinnerwartung. Die beste Stoppregel besteht darin, bis zu einer Mindestaugensumme von 15 zu spielen und dann aufzuhören. Man geht damit zwar mit einer über 62-prozentigen Wahrscheinlichkeit leer aus, gewinnt aber auf die Dauer pro Spiel ca. 6,15 Euro.

Die behandelte Fragestellung lässt sich allgemein in das Problem einbetten, eine Markov-Kette in einem zu präzisierenden Sinn optimal zu stoppen. Man kann beweisen, dass die Regel, bei Erreichen von mindestens 15 Augen zu stoppen, in dem Sinne bestmöglich ist, dass sie den Erwartungswert des Spielgewinns maximiert (siehe z.B. Roters (1998)).

Literatur

Henze, N. (2010): Stochastik für Einsteiger. 8. Auflage: Verlag Teuber-Vieweg.

Henze, N. (2001): Muster in Bernoulli-Ketten. Stochastik in der Schule 21, 2-10.

Humenberger, H. (2000): Überraschendes bei Münzwurfserien. Stochastik in der Schule 20, 4-17.

Roters, M. (1998): Optimal stopping in a dice game. Journ. of Appl. Probab. 35, 229-235.

Anschrift des Verfassers
Prof. Dr. Norbert Henze
Institut für Stochastik
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Kaiserstr. 89–93
76131 Karlsruhe
Henze@kit.edu