Extreme Gewinnhäufigkeiten beim Lotto: Pech und Glück oder nur Werk blinden Zufalls?

NORBERT HENZE, KARLSRUHE

Zusammenfassung: *Ein Artikel von R. Motzer (Motzer (2010)) thematisiert das extrem seltene oder häufige Auftreten bestimmter Lottozahlen (insbesondere der als „Pechzahl“ titulierten 13). Wir zeigen, dass die bislang beobachteten Gewinnhäufigkeiten im deutschen Zahlenlotto 4 aus 49 vollkommen mit einem stochastischen Modell verträglich sind, das die Unabhängigkeit der Gewinnzahlen verschiedener Ausspielungen sowie die Gleichwahrscheinlichkeit aller Sechserauswahlen der 49 Zahlen pro Ausspielung annimmt. Das stochastische Verhalten extremer Gewinnhäufigkeiten kann nicht mit Hilfe der Binomialverteilung beurteilt werden.*

1 Einleitung

Beim Zahlenlotto 6 aus 49 kollidieren die Begriffe stochastische Unabhängigkeit und Gleichwahrscheinlichkeit oft mit dem allgemeinen Empfinden von Zufälligkeit. Hat die Lottotrommel ein Gedächtnis? Merkt sie sich etwa, wenn irgendeine Zahl schon ein Jahr nicht mehr auftrat, und bevorzugt sie diese dann in nachfolgenden Ziehungen?

Akzeptiert man die beiden Modellannahmen, dass die Ergebnisse (Gewinnzahlen) verschiedener Lottoausspielungen stochastisch unabhängig voneinander sind und bei jeder Ausspielung eine Gleichverteilung über allen $\binom{49}{6}$ möglichen Sechserauswahlen der 49 Lottokugeln vorliegt, wird klar, dass jegliches Stöbern in Datensätzen vergangener Ausspielungen die Gewinnwahrscheinlichkeit bei zukünftigen Ausspielungen in keiner Weise beeinflusst. Man läuft hierbei nur Gefahr, nach einer einfachen Regel zu tippen, die auch viele Mitspieler befolgen. Eine solche Regel könnte etwa sein, auf diejenigen Zahlen zu setzen, die bislang am häufigsten auftraten. Sie wurde für die Ziehung am 16. Oktober 1993 allein in Baden-Württemberg 393-mal angewandt (Henze und Riedwyl (1998), Abschnitt 5.3). Auf das Bundesgebiet hochgerechnet ist davon auszugehen, dass mehrere Tausend Lottospieler die aus ihrer Sicht jeweils „heißesten“ Zahlen ankreuzen. Noch extremer sieht es mit den Zahlen der jeweiligen Vorwoche aus, die sich in der darauf folgenden Woche mehrere Zehntausendmal auf deutschen Tippscheinen finden (Henze und Riedwyl (1998), S. 67).

Tabelle 1 zeigt die Ziehungshäufigkeiten der einzelnen Lottozahlen nach 4914 Ausspielungen (Stand: 5. 12. 2010).

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
602	612	623	611	596	624	603
8	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
577	622	587	601	586	543	590
15	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**
572	601	604	599	594	572	580
22	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**
610	592	598	639	640	628	562
29	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**
572	593	633	610	620	595	599
36	**37**	**38**	**39**	**40**	**41**	**42**
601	596	641	603	600	620	608
43	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**
648	602	560	577	602	602	634

Tabelle 1: Ziehungshäufigkeiten der Lottozahlen nach 4914 Ausspielungen

Besonderes Augenmerk rufen hier Zahlen hervor, die extrem selten bzw. oft auftraten. So geht ein Artikel von R. Motzer (Motzer (2010)) der Frage nach, ob die bislang vom Lottozufall meistgemiedene Zahl 13 eine Pechzahl ist. So kam die 13 in den ersten 996 Ziehungen nur 96-mal vor, obwohl doch der nach der Binomialverteilung berechnete Erwartungswert 129 beträgt, im Zeitraum 1955-2009 (4792 Ausspielungen) war die 13 (bei einem Erwartungswert von 587) nur 524-mal Gewinnzahl. Da die ebenfalls nach der Binomialverteilung berechneten Standardabweichungen 10 bzw. 22,7 betragen, liegen beide Ergebnisse unterhalb der vom Erwartungswert subtrahierten doppelten Standardabweichung. Liegen hier „signifikante Abweichungen vom Erwarteten“ vor?

In diesem Aufsatz wird gezeigt, dass das stochastische Verhalten von Gewinnhäufigkeiten, die durch ihr extremes Verhalten quasi „ins Auge springen“, nicht mit Hilfe der Binomialverteilung (und deren Approximation durch die Standardnormalverteilung) beurteilt werden kann, sondern eine simultane Analyse aller 49 Ziehungshäufigkeiten erfordert. Als Folge werden sich die extremen Gewinnhäufigkeiten 648 und 543 sowie deren Differenz als ganz normales Werk blinden Zufalls herausstellen.

2 Das Verhalten einer a-priori gewählten Zahl: Binomial- und Normalverteilung

Wir betrachten n Ausspielungen im Lotto 6 aus 49. Das Ergebnis der k-ten Ausspielung schreiben wir zweckmäßigerweise als Zufallsvektor

$$X_k = (X_{k,1}, X_{k,2}, \ldots, X_{k,49}). \tag{1}$$

Hierbei ist $X_{k,j} = 1$ bzw. $X_{k,j} = 0$ gesetzt je nachdem, ob die Zahl j in der k-ten Ausspielung Gewinnzahl ist oder nicht. Der Vektor X_k weist also an genau 6 Stellen eine Eins und an 43 Stellen eine Null auf. Summiert man die Vektoren $X_1, \ldots, X_n$ (komponentenweise) auf, so entsteht ein Zufallsvektor

$$H_n = (H_{n,1}, H_{n,2}, \ldots, H_{n,49})$$

mit den Komponenten $H_{n,j} = X_{1,j} + X_{2,j} + \ldots + X_{n,j}$ $(j = 1, \ldots, 49)$. Dabei ist $H_{n,j}$ die Gewinnhäufigkeit der Zahl j in n Ausspielungen. Unter der (die Gedächtnislosigkeit der Lottotrommel widerspiegelnden) Annahme, dass $X_1, X_2, \ldots, X_n$ stochastisch unabhängig sind und jeder der $\binom{49}{6}$ Vektoren mit 6 Einsen und 43 Nullen mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftritt, besitzt die Ziehungshäufigkeit $H_{n,j}$ für jede *a-priori*, d.h. *vor* Durchführung der n Ziehungen, gewählte Zahl j eine Binomialverteilung mit Parametern n und $p = 6/49$; es gilt also insbesondere

$$E(H_{n,j}) = np, \qquad V(H_{n,j}) = np(1-p).$$

Nach dem zentralen Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace (s. z.B. Henze (2010), Kapitel 26) konvergiert die Binomialverteilung nach Standardisierung gegen eine Standardnormalverteilung; es gilt also für die standardisierten Häufigkeiten

$$H^*_{n,j} = \frac{H_{n,j} - np}{\sqrt{np(1-p)}} \tag{2}$$

der Grenzwertsatz

$$\lim_{n\to\infty} P\left(H^*_{n,j} \leq x\right) \; = \; \Phi(x), \tag{3}$$

wobei

$$\Phi(x) \; = \; \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet. Mit $n = 4914$ und $p = 6/49$ ergeben sich Erwartungswert und Standardabweichung von $H_{4914,j}$ zu

$$E(H_{4914,j}) \approx 601.7, \qquad \sqrt{V(H_{4914,j})} \approx 22.98.$$

Für das 5%-Quantil $(= -1.645)$ der Standardnormalverteilung liefert dann (3) die Approximation

$$P(H_{4914,j} \leq 601.7 - 1.645 \cdot 22.98) \approx 0.05, \tag{4}$$

also unter Berücksichtigung der Ganzzahligkeit von $H_{4914,j}$ das Resultat

$$P(H_{4914,j} \leq 563) \approx 0.05. \tag{5}$$

Aufgrund des Gesetzes großer Zahlen ist diese Aussage wie folgt zu interpretieren: Nach Wahl einer *festen* Zahl j wird die Ziehungshäufigkeit von j in 4914 Ziehungen beobachtet. Betrachtet man diese 4914 Ziehungen als *ein* Experiment und wiederholt *dieses* sehr oft in unabhängiger Folge, so wird auf die Dauer in ungefähr 95% aller Fälle die beobachtete Ziehungshäufigkeit für die Zahl j kleiner oder gleich 563 sein.

Offenbar ist diese Idealsituation bei dem Datenmaterial aus Tabelle 1 nicht gegeben, da alle 49 Ziehungshäufigkeiten aus *einem* Experiment (4914 Ziehungen) stammen und nicht stochastisch unabhängig sind (es gilt $\sum_{j=1}^{49} H_{4914,j} = 6 \cdot 4914$). Intuitiv leuchtet jedoch ein, dass die stochastische Abhängigkeit der Zufallsvariablen $H_{4914,j} (j = 1, \ldots, 49)$ nicht allzu groß sein dürfte. In der Tat ist im Hinblick auf (5) die Feststellung interessant, dass drei der Gewinnhäufigkeiten (für die Zahlen 13, 28 und 45) höchstens gleich 563 sind (was ca. 6% aller 49 Zahlen entspricht).

3 Die Verteilung der kleinsten Gewinnhäufigkeit

Wählt man *im Nachhinein* (d.h. nach Durchführung der 4914 Ziehungen) $j = 13$, weil die 13 unter allen Zahlen am seltensten auftrat, so besitzt die Ziehungshäufigkeit der 13 keine Binomialverteilung mehr, *weil wir die Zahl mit der kleinsten Ziehungshäufigkeit ausgewählt haben*. Wäre die 24 am seltensten gezogen worden, so wäre ja deren Ziehungs-Negativrekord ins Auge gesprungen. Wir haben es stattdessen mit der Verteilung der kleinsten Gewinnhäufigkeit

$$K_n := \min_{1\leq j\leq 49} H_{n,j}$$

nach n Ziehungen zu tun. Die exakte Verteilung von K_n ist nicht bekannt, wohl aber das asymptotische Verhalten von K_n für $n \to \infty$.

Hierzu verwenden wir die Tatsache, dass für unabhängige und identisch verteilte Zufallsvektoren (also insbesondere für $X_1, \ldots, X_n$ mit X_k wie in (1)) ein zentraler Grenzwertsatz gültig ist (s. z.B. Hinderer (1972), S. 229). Hiernach gilt für den aus den standardisierten Häufigkeiten (2) gebildeten Vektor

$$H_n^* = (H_{n,1}^*, \ldots, H_{n,49}^*)$$

die Verteilungskonvergenz

$$\lim_{n\to\infty} P(H_n^* \leq t) = P(T \leq t), \qquad t \in \mathbb{R}^d. \qquad (6)$$

Hier bezeichnet $T = (T_1, \ldots, T_{49})$ einen multivariat normalverteilten Zufallsvektor mit standardnormalverteilten Komponenten T_j, die paarweise die negative Korrelation -1/48 besitzen (Henze (1995)). Die Kleiner-Gleich-Relation in (6) ist komponentenweise zu verstehen, d.h. es gilt für $t = (t_1, \ldots, t_{49})$:

$$\begin{aligned} \{H_n^* \leq t\} &= \{H_{n,1}^* \leq t_1, \ldots, H_{n,49}^* \leq t_{49}\}, \\ \{T \leq t\} &= \{T_1 \leq t_1, \ldots, T_{49} \leq t_{49}\}. \end{aligned}$$

Wichtig für die Beurteilung von im Nachhinein festgestellten Kuriositäten im Zusammenhang mit allen 49 Ziehungshäufigkeiten ist der als *Abbildungssatz* bekannte Umstand, dass für jede stetige Funktion $g : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ aus (6) die Limesbeziehung

$$\lim_{n\to\infty} P(g(H_n^*) \leq x) = P(g(T) \leq x), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

folgt. Setzt man etwa $g(t_1, \ldots, t_{49}) = t_j$, so ergibt sich wegen der Standardnormalverteilung von $T_j = g(T_1, \ldots, T_{49})$ aus dem Abbildungssatz unmittelbar Aussage (3). Wegen

$$\frac{K_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \min_{1\leq j\leq 49} H_{n,j}^*$$

folgt für die uns interessierende Funktion $g(t_1, \ldots, t_{49}) = \min_{1\leq j\leq 49} t_j$ aus (7) die Grenzwertaussage

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{K_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right) = P\left(\min_{1\leq j\leq 49} T_j \leq x\right), \quad (8)$$

$x \in \mathbb{R}$. Die Grenzverteilung der kleinsten Ziehungshäufigkeit, nachdem man diese wie eine binomialverteilte Zufallsvariable standardisiert, also np subtrahiert und durch die Standardabweichung $\sqrt{np(1-p)}$ dividiert, ist also keine Standardnormalverteilung wie in (3), sondern die Verteilung des Minimums von 49 stochastisch abhängigen standardnormalverteilten Zufallsvariablen $T_1, \ldots, T_{49}$.

Über die Verteilung der Zufallsvariablen $U := \min_{1\leq j\leq 49} T_j$ ist wenig bekannt. Unter Verwendung von Resultaten von Owen und Steck (1962) und Ruben (1954) ergibt sich $E(U) \approx -2.272$. Eine Simulation der Verteilung von U mit insgesamt 100000 Wiederholungen ergab folgende Schätzwerte für p-Quantile u_p von U:

p	u_p	p	u_p
0.01	-3.53	0.75	-1.95
0.025	-3.27	0.9	-1.75
0.05	-3.07	0.95	-1.63
0.1	-2.85	0.975	-1.53
0.25	-2.53	0.99	-1.43
0.5	-2.21		

Tabelle 2: Simulierte Quantile der Verteilung von U

Anhand von Tabelle 2 wird klar, dass die Verteilung von U linksschief ist, was sich in den Ungleichungen

$$u_{1-p} - u_{0.5} < u_{0.5} - u_p$$

für $p = 0.01$, $p = 0.025$, $p = 0.05$, $p = 0.1$ und $p = 0.25$ äußert. Zudem ist der Erwartungswert kleiner als der Median.

Setzen wir in (8) für x das 5%-Quantil $u_{0.05}$ der Verteilung von U ein, so folgt für großes n

$$P\left(\frac{K_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq -3.07\right) \approx 0.05 \qquad (9)$$

und somit für $n = 4914$

$$P(K_{4914} \leq 601.7 - 3.07 \cdot 22.98) \approx 0.05, \qquad (10)$$

also unter Berücksichtigung der Ganzzahligkeit von K_{4914} das Ergebnis

$$P(K_{4914} \leq 531) \approx 0.05. \qquad (11)$$

Ein Vergleich mit (5) zeigt, dass die beobachtete (vermeintlich sensationell kleine) minimale Trefferhäufigkeit 543 nicht signifikant auf dem 5%-Niveau ist. Setzt man anstelle des 5%-Quantils das 25%-Quantil ($= -2.53$) ein, so ergibt sich $P(K_{4914} \leq 543) \approx 0.25$. Eine beim Lotto nach 4914 Ausspielungen beobachtete minimale Trefferhäufigkeit von 543 (oder noch extremer) stellt sich also mit einer wenig spektakulären Wahrscheinlichkeit von ungefähr 1/4 ein. Eine wichtige Botschaft von (9) ist auch, dass man im Vergleich zu (4) das 3.07-fache (und nicht das 1.645-fache) der Standardabweichung $\sqrt{np(1-p)}$ einer Binomialverteilung $Bin(n,p)$ vom Erwartungswert np subtrahieren muss, um ein auf dem 5%-Niveau signifikantes „Unterschreitungs-Resultat“ für das Minimum der Ziehungshäufigkeiten zu erhalten.

4 Die Verteilung der größten Gewinnhäufigkeit

Das asymptotische Verhalten der größten Gewinnhäufigkeit

$$G_n := \max_{1\le j\le 49} H_{n,j}$$

folgt ebenfalls aus (7), wenn man die Funktion $g(t_1,\ldots,t_{49}) = \max_{1\le j\le 49} t_j$ wählt. Es ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{G_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right) = P\left(\max_{1\le j\le 49} T_j \le x\right), \quad (12)$$

$x \in \mathbb{R}$. Aus Symmetriegründen besitzt das rechts auftretende Maximum $V := \min_{1\le j\le 49} T_j$ die gleiche Verteilung wie das Negative der Zufallsvariablen U. Somit besteht für das p-Quantil v_p von V und das $(1-p)$-Quantil u_{1-p} von U der Zusammenhang

$$v_p = -u_{1-p},$$

und man erhält die zu (9), (10) und (11) korrespondierenden Resultate

$$P\left(\frac{G_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \ge 3.07\right) \approx 0.05,$$

$$P(K_{4914} \ge 601.7 + 3.07 \cdot 22.98) \approx 0.05,$$

$$P(K_{4914} \ge 673) \approx 0.05.$$

Auch die nach 4914 Ausspielungen beobachtete maximale Gewinnhäufigkeit von 648 ist somit wenig spektakulär. Setzt man für x in (12) den Median 2.21 von V ein, so ergibt sich $P(K_{4914} \ge 653) \approx 0.5$. Man kann also getrost darauf wetten, dass sich nach 4914 Ausspielungen eine maximale Gewinnhäufigkeit von mindestens 648 einstellt.

5 Die Verteilung der Häufigkeitsspanne

Das stochastische Verhalten der *Häufigkeitsspanne*

$$D_n := G_n - K_n = \max_{1\le j\le n} H_{n,j} - \min_{1\le j\le n} H_{n,j}$$

kann ebenfalls mit Hilfe von (7) beschrieben werden, wenn man die Funktion

$$g(t_1,\ldots,t_{49}) = \max_{1\le j\le 49} t_j - \min_{1\le j\le 49} t_j$$

wählt. Setzen wir kurz

$$W := V - U = \max_{1\le j\le 49} T_j - \min_{1\le j\le 49} T_j$$

und beachten die Gleichheit

$$g(H_n^*) = \max_{1\le j\le 49} H_{n,j}^* - \min_{1\le j\le 49} H_{n,j}^* = \frac{D_n}{\sqrt{np(1-p)}},$$

so liefert (7)

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{D_n}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right) = P(W \le x), \quad (13)$$

$x > 0$. Tabelle 3 zeigt einige (aufgrund von 100000 Simulationen der Verteilung von W ermittelten) p-Quantile w_p von W.

p	w_p	p	w_p
0.01	3.19	0.75	4.94
0.025	3.37	0.9	5.40
0.05	3.53	0.95	5.69
0.1	3.72	0.975	5.96
0.25	4.06	0.99	6.28
0.5	4.48		

Tabelle 3: Quantile der Verteilung von $W = V - U$

Eine wichtige Botschaft von (13) ist, dass die Häufigkeitsspanne der Gewinnzahlen nach n Ausspielungen stochastisch mit der Wurzel aus n wächst. Setzt man in (13) für x das 95%-Quantil $w_{0.95} = 5.69$ ein, so folgt für großes n

$$P(D_n > 5.69 \cdot \sqrt{np(1-p)}) \approx 0.05$$

und somit unter Berücksichtigung der Ganzzahligkeit von D_n im vorliegenden Fall $n = 4914$

$$P(D_{4914} \ge 131) \approx 0.05.$$

Die beobachtete Häufigkeitsspanne von 105 (=648-543) nach 4914 Ausspielungen ist also weit davon entfernt, auf dem 5%-Niveau signifikant zu sein. Sie liegt eher im Bereich des Medians der Verteilung von D_{4914} (es gilt $P(D_{4914} \ge 103) \approx 0.5$).

6 Der χ^2-Test auf Gleichwahrscheinlichkeit der Lottozahlen

Um die Hypothese H_0 der Gleichwahrscheinlichkeit der Lottozahlen aufgrund der Ziehungshäufigkeiten $H_{n,1},\ldots,H_{n,49}$ der 49 Zahlen nach n Ausspielungen zu testen, kann die Prüfgröße

$$T_n = \frac{48}{43} \cdot \sum_{j=1}^{49} \frac{(H_{n,j} - n\cdot 6/49)^2}{n\cdot 6/49}$$

verwendet werden. Bei Gültigkeit der Hypothese H_0 besitzt T_n asymptotisch für $n\to\infty$ eine Chi-Quadrat-Verteilung mit 48 Freiheitsgraden (χ^2_{48}-Verteilung)

(Morgenstern (1979) oder Henze (1995)). Der verglichen mit der Chi-Quadrat-Testgröße zur Prüfung auf Gleichwahrscheinlichkeit der Trefferarten in einem multinomialen Versuchsschema (siehe z.B. Henze (2010), Abschnitt 28.7) angebrachte Korrekturfaktor 48/43 rührt daher, dass pro Ausspielung nicht nur eine, sondern sechs verschiedene Zahlen gezogen werden. Die Ablehnung der Hypothese H_0 erfolgt für große Werte von T_n. Für die Daten von Tabelle 1 ergibt sich der Wert der Prüfgröße zu

$$T_{4914} = 44,04.$$

Dieses Resultat liegt unterhalb des Erwartungswertes (= 48) der χ^2_{48}-Verteilung. Die vorliegenden Daten sind also in jeder Hinsicht verträglich mit den eingangs gemachten Annahmen.

7 Zusammenfassung

Es bezeichnen $H_{n,j}$ die (binomialverteilte) Häufigkeit der Zahl j in n Ausspielungen beim Lotto und $H^*_{n,j} = (H_{n,j} - np)/\sqrt{np(1-p)}$ (mit $p = 6/49$) deren standardisierte Häufigkeit. Zur stochastischen Beurteilung von Ereignissen, die (wie etwa die minimale Häufigkeit) durch die Häufigkeiten *aller* Zahlen definiert sind, ist es erforderlich, den aus den 49 Komponenten $H^*_{n,j},\ 1 \le j \le 49$, bestehenden Vektor H^*_n zu betrachten. Dieser konvergiert für $n \to \infty$ nach Verteilung gegen einen Zufallsvektor T mit einer 49-dimensionalen Normalverteilung und standardnormalverteilten Komponenten $T_1, \ldots, T_{49}$, die paarweise die Korrelation $-1/48$ besitzen. Ist der aus der Betrachtung aller Häufigkeiten „herausgelesene“ interessierende Aspekt der Wert $g(H^*_n)$ einer stetigen reellen Funktion g von 49 Variablen, so verhält sich $g(H^*_n)$ bei wachsendem n wie die entsprechende Funktion $g(T)$ des Zufallsvektors T. In dieser Arbeit wurden die Funktionen

- $g(t_1, \ldots, t_{49}) = \min_{1 \le j \le 49} t_j$,
- $g(t_1, \ldots, t_{49}) = \max_{1 \le j \le 49} t_j$,
- $g(t_1, \ldots, t_{49}) = \min_{1 \le j \le 49} t_j - \max_{1 \le j \le 49} t_j$,
- $g(t_1, \ldots, t_{49}) = \frac{48}{49} \cdot \sum_{j=1}^{49} t_j^2$

betrachtet, um das Verhalten der kleinsten und der größten Gewinnhäufigkeit, der Häufigkeitsspanne sowie einer χ^2-Testgröße zur Prüfung auf Gleichwahrscheinlichkeit der Lottozahlen zu beurteilen. Die Quantile der entsprechenden Funktionen $g(T)$ wurden in den ersten drei Fällen durch Simulation ermittelt.

Die Gewinnhäufigkeiten der 49 Zahlen im deutschen Lotto nach 4914 Ausspielungen sind aus stochastischer Sicht unspektakulär. Die beobachtete Schwankungsbreite ist völlig vereinbar mit den Annahmen der stochastischen Unabhängigkeit verschiedener Ausspielungen und der Gleichwahrscheinlichkeit aller Sechserauswahlen pro Ausspielung.

Literatur

Henze, N. (1995): 2000mal Lotto am Samstag – gibt es Kuriositäten? In: Jahrbuch Überblicke Mathematik 1995, A. Beutelspacher et al. (Hrsg.), Verlag Vieweg+Teubner, Wiesbaden.

Henze, N. und Riedwyl, H. (1998): How to win more – Strategies for increasing a lottery win. Verlag A.K. Peters, Natick, Massachusetts.

Henze, N. (2010): Stochastik für Einsteiger. 8. Auflage: Verlag Vieweg+Teubner, Wiesbaden.

Hinderer, K. (1972): Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie. Springer-Verlag, Berlin.

Morgenstern, D. (1979): Der Chi-Quadrat-Test für Prüfung der Gleichwahrscheinlichkeit der Lotto-Zahlen. Math. Phys. Sem. Berichte 26, 36-39.

Motzer, R. (2010): 13 – eine Pechzahl beim Lotto? Stochastik in der Schule 30, 33-35.

Owen. D. B. und G.P. Steck (1962): Moments of order statistics from the equicorrelated multivariate normal distribution. Ann. Math. Statist. 33, 1286-1291.

Ruben, H. (1954): On the moments of order statistics in samples from normal populations. Biometrika 41, 200-227.

Anschrift des Verfassers
Prof. Dr. Norbert Henze
Institut für Stochastik
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Kaiserstr. 89–93
76131 Karlsruhe
`Henze@kit.edu`