

# Stochastische Überraschungen beim Spiel BINGO

NORBERT HENZE, KARLSRUHE, UND HANS HUMENBERGER, WIEN

**Zusammenfassung:** In diesem Beitrag wird das bekannte Spiel BINGO erläutert und näher analysiert. Ausgehend vom konkreten BINGO-Spiel wird die Situation auch allgemein untersucht. Dabei ergeben sich so manche Aspekte, die auch in der Schule verwirklicht werden können, andere werden der Ausbildung von Mathematiklehrkräften vorbehalten bleiben. Jedenfalls treten prima vista überraschende Resultate auf (die zugehörigen Schätzungen werden i. A. relativ weit entfernt von den tatsächlichen Werten liegen), und dies ist bekanntlich oft ein Motor für die Motivation, was schon in zahlreichen Aufsätzen über stochastische Paradoxa und kontraintuitive Phänomene zu lesen ist.

## 1 Einleitung

BINGO<sup>1</sup> ist ein sehr einfaches Spiel. Man hat dabei eigentlich keine Strategien zu verfolgen, sondern muss nur *schnell* sein, das ist alles, was man *selbst* steuern kann. Trotzdem besitzt BINGO interessante stochastische Aspekte, die im Folgenden herausgearbeitet werden sollen, z. B. wie viele Ziehungen muss man im Durchschnitt abwarten, bis man „BINGO!“ rufen kann? Oder: Wie wahrscheinlich ist es, dass man erst nach der letzten gezogenen Kugel BINGO! rufen kann? Welche Anzahl der nötigen Ziehungen, bis man BINGO! rufen kann, ist die wahrscheinlichste?

Beim BINGO gibt es verschiedene Versionen, wobei wir uns speziell für die Version außerhalb Amerikas interessieren. Die amerikanische Version ist z. B. in Ethier (2010, S. 496) beschrieben. Viele Personen können gleichzeitig spielen, entweder online oder in einer Halle. Man kauft zuerst einen realen oder (bei der online-Version) elektronischen BINGO-Schein, dieser besteht bei der uns interessierenden Version aus drei Zeilen (Reihen) zu je fünf Zahlen (von 1 bis 90): Die Scheine haben meist neun Felder in einer Reihe, aber in nur fünf stehen Zahlen, so dass man die leeren Felder eigentlich ausblenden kann (siehe Abb. 1):

<sup>1</sup>Wir danken Jan H. Müller (Riviusgymnasium Attendorf und TU Dortmund), dass er uns auf die entsprechende Fragestellung aufmerksam gemacht hat: Erwartungswert der Anzahl nötiger Ziehungen, bis man „BINGO!“ rufen kann.

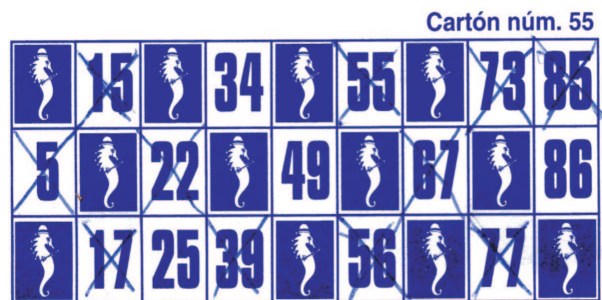


Abbildung 1: Spielschein aus Spanien

In der ersten Spalte können nur die Zahlen 1 – 10, in der zweiten 11 – 20, . . . , in der neunten 81 – 90 stehen (dies hat für unsere Überlegungen keine Auswirkungen, es wurde wahrscheinlich aus Übersichtlichkeitsgründen eingeführt).

Nun zieht ein Quizmaster (Halle) oder ein Zufallszahlengenerator (online) beständig Zahlen aus der Menge  $\{1, 2, \dots, 90\}$  (ohne Zurücklegen). In der Regel wird alle zehn Sekunden eine Gewinnzahl aufgerufen, so dass sich der BINGO-Spieler während des Spiels permanent konzentrieren muss und rasch reagieren sollte. Dies wird insbesondere dann schwieriger, wenn man mit mehreren BINGO-Scheinen gleichzeitig spielt, was durchaus möglich und üblich ist. Dabei ist es dann gar nicht so leicht, einen schnellen und guten Überblick zu bewahren.

Es gibt verschiedene „Stufen von BINGO“, wobei immer nur die/der Erste gewinnt, die/der schreit (bzw. klickt bei der Onlineversion):

1. Wenn alle Zahlen *einer beliebigen Reihe* des BINGO-Scheins gezogen wurden.
2. Wenn alle Zahlen *zweier beliebiger Reihen* des BINGO-Scheins gezogen wurden.
3. Wenn *alle Zahlen des BINGO-Scheins* gezogen wurden („coverall“).

Es gibt auch andere BINGO-Formen (z. B. in Amerika): Dabei stehen nicht 90, sondern nur 75 Zahlen zur Verfügung, der BINGO-Schein ist ein quadratisches  $5 \times 5$ -Raster, bei dem das mittlere Feld meist keine Zahl enthält. Die Überschrift besteht passend aus den fünf Buchstaben BINGO, wobei in der B-Spalte nur Zahlen im Bereich 1 – 15, in der I-Spalte 16 – 30, in der N-Spalte 31 – 45, in der G-Spalte 46

– 60 und in der O-Spalte Werte im Bereich 61 – 75 stehen, dies wieder zur besseren Orientierung – siehe Abb. 2.

<b>B I N G O</b>				
<b>12</b>	<b>18</b>	<b>41</b>	<b>47</b>	<b>61</b>
<b>7</b>	<b>26</b>	<b>39</b>	<b>54</b>	<b>70</b>
<b>4</b>	<b>27</b>	FREE 4785 SPACE	<b>49</b>	<b>63</b>
<b>5</b>	<b>23</b>	<b>35</b>	<b>58</b>	<b>73</b>
<b>3</b>	<b>30</b>	<b>32</b>	<b>52</b>	<b>75</b>

Abbildung 2: Amerikanischer BINGO-Schein

BINGO hat man hier entweder bei verschiedenen Mustern (üblich: eine „Linie“, d. h. fünf in einer Reihe, waagrecht, senkrecht oder diagonal, das mittlere Feld ist dann sozusagen ein Joker für die mittlere Zeile, mittlere Spalte und für die Diagonalen) oder auch beim ganzen Feld („coverall“), dies muss vorher ausgemacht werden.

Wir beschränken uns auf die Version mit den drei Reihen zu je fünf Zahlen und verzichten für die mathematische Untersuchung auf die Felder ohne Zahlen (Seepferdchen als Symbole, siehe Abb.1):

15	34	55	73	85
5	22	49	67	86
17	25	39	56	77

### Geschichte<sup>2</sup> des BINGO:

Begonnen hat das BINGO-Spiel in Amerika. Der New Yorker Spielwarenverkäufer Edwin S. Lowe sah 1929 in Jacksonville auf einem Jahrmarkt einen Stand, bei dem ein Spiel mit Bohnen gespielt wurde: Die Spieler bedeckten die durch einen „Caller“ oder „Pitchman“ gezogenen Zahlen auf ihrem Spielschein mit kleinen Bohnen, und zwar so lange, bis einer eine vollständige Reihe von Bohnen hatte und freudestrahlend „Beano!“ rief. Sehr viele Menschen spielten dieses Spiel, und auch Lowe war begeistert. Er produzierte dieses Spiel dann auch mit Spielscheinen und Bohnen selbst und probierte es zunächst im privaten Bereich mit Freunden. Einer sehr euphorischen Spielerin fehlte nur noch eine Zahl bei einer Reihe, sie war schon sehr angespannt und prompt kam diese Zahl, sie rief versehentlich „Bingo!“ statt „Beano!“. Dieser Ausruf gefiel Lowe viel besser, und dann blieb es auch bei diesem Namen.

<sup>2</sup>Siehe auch: [http://www.casinoportalen.de/spiel\\_artikel/bingo/bingo\\_spiele.asp](http://www.casinoportalen.de/spiel_artikel/bingo/bingo_spiele.asp)

<sup>3</sup>Hier sind nicht nur Schüler(innen) gemeint, sondern auch mit Stochastik vertrautere Personen.

## 2 Möglicher Einstieg im Schulunterricht

Zu Beginn könnten Schüler(innen) schätzen:

1. Wie viele Ziehungen sind im Durchschnitt nötig, bis man alle 15 hat („coverall“)?
2. Welche Anzahl benötigter Ziehungen (unter den folgenden) ist am wahrscheinlichsten: 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90?
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man alle 90 Ziehungen benötigt?

Die meisten werden sich hier ziemlich verschätzen, und das ist auch nicht schlimm, es zeigt nur, dass wir<sup>3</sup> in stochastischen Situationen oft ein nur sehr schlechtes Gefühl haben. Andererseits sind dies aber oft Anlässe, „es“ genauer wissen zu wollen, d. h. sie können sehr förderlich für die Motivation sein.

Hier gilt es zu bedenken: Es handelt sich **nicht** um die Frage, nach durchschnittlich wie vielen Ziehungen bei einem BINGO-Spiel **irgendjemand** BINGO ruft. Dies ist abhängig von der Anzahl Mitspielender Personen. Wenn viele BINGO-Scheine beteiligt sind, so kann schneller mal jemand BINGO rufen. Hier stellen wir aber die Frage nach der durchschnittlichen Wartezeit, bis der **eigene** BINGO-Schein „voll ist“. Wenn jemand festgestellt hat (Erfahrung!), dass immer nach ca.  $X$  Ziehungen BINGO gerufen wird, so bedeutet dies für unsere Fragestellung noch nicht sehr viel, man wird dadurch eher zu einem zu niedrigen Schätzwert für die Anzahl nötiger Ziehungen für einen festgelegten BINGO-Schein verleitet.

Die auf den ersten Blick verblüffenden Antworten auf obige Fragen sind:

1. ca. 85,3
2. 90 (dies ist die wahrscheinlichste unter allen möglichen Anzahlen nötiger Ziehungen, die Wahrscheinlichkeiten nehmen von 15 bis 90 streng monoton zu, d. h. von allen möglichen Fällen ist es am wahrscheinlichsten, dass man bis zur letzten Kugel warten muss!)
3. 1/6

Bevor hier stochastisch weitergearbeitet wird, können sich natürlich auch Simulationen (z. B. mit EXCEL) anschließen, auch diese sind wertvolle Hilfsmittel, um Einsicht, Vertrauen und Motivation zu schaffen. So eine Simulation ist allerdings auch eine relativ anspruchsvolle Aufgabe.

### 3 Fünfzehn Zahlen am 90-BINGO-Schein – „coverall“

Die Zufallsvariable  $X$  bezeichne die Anzahl nötiger Ziehungen, bis alle Zahlen  $b_1, \dots, b_{15}$  eines bestimmten BINGO-Scheins gezogen werden, klarerweise gilt  $15 \leq X \leq 90$ . Für den interessierenden Erwartungswert  $E(X)$  benötigt man zunächst die Wahrscheinlichkeiten  $P(X = j)$ ,  $j = 15, \dots, 90$ .

Es gibt mehrere Möglichkeiten, diese Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, was bei einem möglichen Einsatz im Schulunterricht natürlich positiv hervorzuheben ist. Trotzdem bleibt die Aufgabe relativ schwierig, so dass ihre erfolgreiche Bearbeitung in der Regel nicht in selbständiger Schüler(innen)arbeit möglich sein wird. Dies bezieht sich auf alle drei folgenden Versionen 3.1 bis 3.3, viele Hinweise müssen hier sicher von der Lehrkraft kommen. Insgesamt möchten wir betonen, dass das Thema primär für stochastische Vertiefungen in Wahlpflichtfächern und Facharbeiten gedacht ist, weniger für den verpflichtenden Regelunterricht. Selbstverständlich aber auch für die Lehrer(innen)aus- und -fortbildung.

#### 3.1 Beginn hinten bei $j = 90$

Ein möglicher Hinweis, besteht hier darin, bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten  $P(X = j)$ ,  $j = 15, \dots, 90$  *hinten* zu beginnen, d. h. zuerst  $P(X = 90)$  zu berechnen. Das Ereignis  $\{X = 90\}$  tritt nämlich genau dann ein, wenn die letzte gezogene Kugel (bzw. Zahl) eine von den 15 Zahlen  $b_1, \dots, b_{15}$  am BINGO-Schein ist. Da keine der 90 Zahlen für irgendeine Stelle der Ziehungsreihenfolge bevorzugt ist (auch für die letzte Stelle nicht), ist die Wahrscheinlichkeit, als letzte gezogen zu werden, für jede Zahl gleich, nämlich  $1/90$ . Die Wahrscheinlichkeit, dass eine der 15-BINGO-Schein-Zahlen als letzte gezogen wird, ist daher  $15/90$  (auch so: für die letzte Zahl gibt es 90 Möglichkeiten, 15 davon sind günstig für das Ereignis  $\{X = 90\}$ ):

$$P(X = 90) = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$$

Für  $\{X = 89\}$  muss an der 90. Stelle eine aus den anderen 75 Zahlen gezogen werden, die 89. Ziehung muss eine Zahl aus  $b_1, \dots, b_{15}$  ergeben. Daher folgt

$$P(X = 89) = \frac{75}{90} \cdot \frac{15}{89}$$

Analog erhalten wir

$$P(X = 88) = \frac{75}{90} \cdot \frac{74}{89} \cdot \frac{15}{88}, \quad P(X = 87) = \frac{75}{90} \cdot \frac{74}{89} \cdot \frac{73}{88} \cdot \frac{15}{87}$$

und allgemein

$$P(X = j) = \frac{75 \cdot 74 \cdot \dots \cdot (j-14) \cdot 15}{90 \cdot 89 \cdot \dots \cdot j}$$

bzw.

$$P(X = j) = 15 \cdot \frac{75!}{90!} \cdot \frac{1}{(j-1)!}, \quad j = 15, \dots, 90. \quad (1)$$

Mit diesen Wahrscheinlichkeiten kann man einerseits die Verteilung von  $X$  bestimmen und andererseits auch den zugehörigen Erwartungswert. Dabei muss klarerweise ein Computer eingesetzt werden (EXCEL, CAS), Tabelle 1 zeigt einige Werte.

$j$	$P(X = j)$	$j$	$P(X = j)$
90	0,1667	85	0,0693
89	0,1404	84	0,0578
88	0,1181	83	0,0480
87	0,0991	82	0,0398
86	0,0830	81	0,0329

**Tabelle 1:** Verteilung der Wartezeit auf 15 Zahlen beim 90-BINGO

Insbesondere folgen die auf den ersten Blick verblüffenden Resultate:

- Die Wahrscheinlichkeiten wachsen streng monoton mit  $j$ , 90 ist also die wahrscheinlichste Anzahl nötiger Ziehungen! Diese Monotonie ist mit unserem Ansatz auch leicht zu begründen, denn es gilt:

$$P(X = j + 1) = P(X = j) \cdot \underbrace{\frac{j}{j-14}}_{>1}$$

- Die Wahrscheinlichkeiten  $P(X = j)$  beginnen erst für sehr großes  $j$ , sich relevant von 0 zu unterscheiden: Sie liegen zum ersten Mal über 5% bei  $j = 84$  Ziehungen, zum ersten Mal über 10% bei  $j = 88$  Ziehungen.
- Man kann beim 90-BINGO getrost darauf wetten, dass man mindestens 87 Kugeln abwarten muss, bis alle Zahlen eines 15-BINGO-Scheins gezogen wurden, denn  $P(X \geq 87) \approx 0,5243 > 0,5$  (vgl. Tab. 1).
- Für den Erwartungswert ergibt sich mit Computer:  $E(X) = \sum_{j=15}^{90} j \cdot P(X = j) = \frac{1365}{16} \approx 85,3$

Dieser Erwartungswert scheint auf den ersten Blick sehr groß zu sein, und vermutlich würde kaum jemand aus dem Bauch heraus eine so hohe Zahl dafür schätzen. Gleichwohl lässt er sich aber plausibel machen. Dazu betrachten wir gedanklich alle 90 BINGO-Kugeln in zeitlicher Reihenfolge gezogen und nacheinander aufgereiht. Für die folgende Überlegung hilft die Vorstellung, dass alle 90 Kugeln aus je zwei Hälften zusammengesetzt sind und äußerlich gleich aussehen. Unsere Kugeln auf dem Tippschein interpretieren wir als innen rote Kugeln, die übrigen als schwarze. Die innen angebrachte Farbe, rot oder schwarz, kann man erst feststellen, wenn man die Kugelhälften auseinanderzieht. Wenn man die Kugeln, beginnend mit der neunzigsten, nacheinander auf ihre innere Farbe untersucht, nimmt die Zufallsvariable  $X$  den Wert  $91 - k$  an, wenn die  $k$ -te untersuchte Kugel die erste rote Kugel ist. Erfolgte das Ziehen mit Zurücklegen, so benötigte man durchschnittlich 6 Kugeln, bis man zum ersten Mal eine rote Kugel zieht, denn die zugehörige Erfolgswahrscheinlichkeit ist  $1/6$ . Wenn man bei der 6. Ziehung erstmals eine rote Kugel zieht, nimmt aber die Zufallsvariable  $X$  den Wert 85 an! Da wir ohne Zurücklegen ziehen, sollte man im Durchschnitt etwas weniger als sechs Versuche bis zur ersten Kugel warten, was den etwas oberhalb von 85 liegenden Erwartungswert auch plausibel machen dürfte. Später stellen wir noch eine andere Möglichkeit des Plausibelmachens vor.

### 3.2 Mit Binomialkoeffizienten bzw. hypergeometrischer Verteilung

Wenn „Kombinationen“ (Binomialkoeffizienten bzw. „hypergeometrische Wahrscheinlichkeiten“) im Vordergrund stehen sollen, so kann die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten  $P(X = j)$ ,  $j = 15, \dots, 90$ , auch anders geschehen, indem man die Überlegungen *vor*ne beginnt bei  $j = 15$ .

Der erste der interessierenden Wahrscheinlichkeitswerte ist sehr einfach zu erhalten:  $P(X = 15) = \frac{1}{\binom{90}{15}}$ .

Genau eines der  $\binom{90}{15}$  möglichen Ziehungsergebnisse bei 15 Ziehungen (aus der Menge  $\{1, \dots, 90\}$  ohne Zurücklegen, Reihenfolge irrelevant) ist günstig.

Wie berechnet man  $P(X = 16)$ ? Bei 16 Ziehungen gibt es  $\binom{90}{16}$  mögliche Ziehungsergebnisse, günstig davon sind jene, bei denen 15 Zahlen aus der gewünschten Menge  $b_1, \dots, b_{15}$  stammen und eine Zahl aus den restlichen 75 Zahlen:

$$\frac{\binom{15}{15} \cdot \binom{75}{1}}{\binom{90}{16}}$$

Aber hier ist im Zähler bei der Anzahl der günstigen Möglichkeiten auch noch jene (für  $X = 16$  zu Unrecht) inkludiert, dass man schon nach 15 Ziehungen seine 15 BINGO-Zahlen hat, d. h. wir haben einstweilen nur  $P(X \leq 16)$  ausgerechnet. Davon müssen wir nur  $P(X = 15) = P(X \leq 15)$  abziehen und erhalten  $P(X = 16)$ :

$$P(X = 16) = \frac{\overbrace{\binom{15}{15} \cdot \binom{75}{1}}^1}{\underbrace{\binom{90}{16}}_{P(X \leq 16)}} - \frac{1}{\underbrace{\binom{90}{15}}_{P(X \leq 15)}}$$

Da  $\binom{15}{15} = 1$  (es müssen ja alle 15 Zahlen des BINGO-Scheins gezogen werden, und dafür gibt es nur eine Möglichkeit bei 15 Ziehungen), braucht man hier eigentlich gar nicht „hypergeometrische Wahrscheinlichkeiten“ der Art  $\frac{\binom{15}{15} \cdot \binom{75}{1}}{\binom{90}{16}}$ , sondern kann gleich schreiben  $\frac{\binom{75}{1}}{\binom{90}{16}}$ .

Analog erhält man zunächst

$$P(X \leq 17) = \frac{\binom{75}{2}}{\binom{90}{17}}$$

bzw. allgemein

$$P(X \leq j) = \frac{\binom{75}{j-15}}{\binom{90}{j}} =: f(j), \quad j = 15, \dots, 90,$$

denn das Ereignis  $\{X \leq j\}$  tritt genau dann ein, wenn nach  $j$  Ziehungen alle 15 Zahlen des BINGO-Scheins vorliegen und somit die günstigen Fälle darin bestehen, aus den übrigen 75 Kugeln noch  $j - 15$  Kugeln zu ziehen. Dabei soll – wie in der Mathematik wegen  $0! := 1$  üblich –  $\binom{75}{0} := 1$  gesetzt werden. Damit lässt sich allgemein

$$P(X = j) = f(j) - f(j-1) \quad (2)$$

berechnen, wobei sich hier EXCEL oder ein CAS hervorragend einsetzen lassen. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass (1) und (2) äquivalent sind. Der entscheidende „Trick“ bei dieser Herangehensweise ist, dass man zu den eigentlich interessierenden Wahrscheinlichkeiten  $P(X = j)$  über die Wahrscheinlichkeiten  $P(X \leq j)$  durch Differenzbildung kommen kann (Hinweis von der Lehrkraft!). Schüler(innen) haben schon sehr viel geleistet, wenn sie selbständig Wahrscheinlichkeiten der Art  $P(X \leq j)$  berechnen können, dazu ist ein sehr verständiger Umgang mit „Auswahlen ohne Beachtung der Reihenfolge“, d. h. „Kombinationen ohne Wiederholung“ bzw. Binomialkoeffizienten nötig.

### 3.3 Uminterpretation als BINGO-Lotto

Man kann auf die Formel für  $P(X = j)$  auch noch auf eine dritte Art kommen.

Wir betrachten die 15 Zahlen des Spielers (auf seinem BINGO-Schein) als rote Kugeln und die übrigen 75 Zahlen als schwarze Kugeln. Für unsere Fragestellung kommt es nämlich gar nicht auf die genauen Zahlen an. Es werden nun der Reihe nach rein zufällig alle Kugeln gezogen, und es wird von links nach rechts in zeitlicher Reihenfolge der Ziehungen ein 90-Tupel  $(c_1, c_2, \dots, c_{90})$  gebildet, wobei  $c_j$  „rot“ bzw. „schwarz“ ist, falls die  $j$ -te gezogene Kugel rot bzw. schwarz ist. Es entsteht ein 90-Tupel, in dem 15 Mal „rot“ und 75 Mal „schwarz“ steht, wobei keine der  $\binom{90}{15}$  Ziehungsmöglichkeiten bevorzugt ist, d. h. sie sind alle gleich wahrscheinlich. Die Nummer des Platzes, auf dem am weitesten rechts „rot“ liegt, ist die Realisierung der obigen Zufallsvariablen  $X$ . Diese Anordnung kann man aber auch als Realisierung eines „BINGO-Lottos 15 aus 90“ ansehen, denn die Nummern der 15 Plätze, auf denen die 15 roten Kugeln liegen, sind 15 verschiedene Zahlen im Bereich von 1 bis 90, wobei alle 15-Auswahlen gleich wahrscheinlich sind.  $X$  hat also die gleiche Verteilung wie die größte „BINGO-Lotto-Zahl“.

Die Wahrscheinlichkeit, dass allgemein bei einem „15 aus 90 Lotto“ die größte Gewinnzahl gleich  $j$  ist, ist gleich  $\frac{\binom{j-1}{14}}{\binom{90}{15}}$ , denn die günstigen Fälle sind die, bei denen von den  $j-1$  Zahlen, die kleiner als  $j$  sind, 14 ausgewählt werden. Die Gesamtzahl aller Möglichkeiten ist  $\binom{90}{15}$ . Man erhält also hier als Ergebnis

$$P(X = j) = \frac{\binom{j-1}{14}}{\binom{90}{15}}, \quad j = 15, \dots, 90. \quad (3)$$

Wie in Abschnitt 3.1 liefert auch diese Überlegung direkt eine Formel für  $P(X = j)$ , ohne dass wir zuerst die Wahrscheinlichkeiten  $P(X \leq j)$  bestimmen müssen. Man kann sich wiederum leicht davon überzeugen, dass (3) äquivalent zu (1) und (2) ist.

Damit stehen drei verschiedene Varianten zur Verfügung, also Richtungen, in die Schüler(innen) arbeiten können. Die Lehrkräfte können ihre sicher nötigen Hinweise (ohne gleich alles zu verraten) – je nach Schüler(innen)gruppe – auch in drei verschiedene Richtungen steuern. Selbst wenn hier „Selbständigkeit“ bei der Schüler(innen)arbeit nicht im Zentrum stehen wird, jedenfalls wird dabei ein verständiger Umgang mit *Zufallsvariablen*,

*Binomialkoeffizienten* und mit dem Begriff des *Erwartungswerts* gefördert und gefordert, dabei handelt es sich um drei sehr wichtige Bereiche der Oberstufenstochastik. Wir möchten an dieser Stelle nochmal auf die Möglichkeit eines sinnvollen Computereinsatzes hinweisen (Berechnung der Einzelwahrscheinlichkeiten und des Erwartungswertes) und auf die Tatsache, dass die kontraintuitiven Ergebnisse nach Aufklärung verlangen und so als Motivationsquelle dienen können.

Nun könnten Schüler(innen) auch schon das analoge Problem beim Amerikanischen BINGO lösen: Hier hat man 75 mögliche Zahlen, aus denen gezogen wird, und man wartet auf 24 spezielle Zahlen auf dem eigenen BINGO-Schein („coverall“).

Die meisten Schüler(innen) werden – von sich aus – mit diesem Resultat beim 90-BINGO (Einzelwahrscheinlichkeiten und Erwartungswert) zufrieden sein, aber die Lehrkraft kann hier noch viele weitere Aktivitäten anregen, z. B. dass man eine *allgemeine* Formel erarbeitet – siehe Abschnitt 5.

Diese Resultate (Monotonie, großer Erwartungswert) sind sicher für viele sehr unerwartet und kontraintuitiv, wobei man eine Erhöhung der Plausibilität z. B. dadurch erreicht, dass man eine einfachere Situation wie im folgenden Abschnitt betrachtet.

### 4 Wie wäre die Situation, wenn der BINGO-Schein nur eine Zahl hätte?

Wie viele Ziehungen müsste man hier im Durchschnitt warten? Die Zufallsvariable  $X$  bezeichne die Anzahl nötiger Ziehungen, bis diese eine bestimmte Zahl gezogen wird. Als diese bestimmte Zahl können wir uns stellvertretend die 1 vorstellen. Die möglichen Ausprägungen von  $X$  sind die Zahlen  $1, \dots, 90$ . Für den Erwartungswert brauchen wir die einzelnen Wahrscheinlichkeiten  $P(X = i)$  für  $i = 1, \dots, 90$ . Hier ist die Situation noch sehr leicht: Das Ereignis  $\{X = i\}$  bedeutet, dass die 1 als  $i$ -te Kugel gezogen wird. Ein einfaches Symmetrieargument (keine Kugel ist für die Ziehung an  $i$ -ter Stelle bevorzugt) ergibt  $P(X = i) = \frac{1}{90}$  für alle  $i = 1, \dots, 90$ . Etwas umständlicher sieht man das auch so:  $P(X = 1) = \frac{1}{90}$ ,  $P(X = 2) = \frac{89}{90} \cdot \frac{1}{89}$ ,  $P(X = 3) = \frac{89}{90} \cdot \frac{88}{89} \cdot \frac{1}{88} \dots$ . Daher lässt sich der zugehörige Erwartungswert  $E(X)$  leicht ausrechnen:  $E(X) = 1 \cdot \frac{1}{90} + 2 \cdot \frac{1}{90} + \dots + 90 \cdot \frac{1}{90} = 45,5$ .

Man muss also durchschnittlich schon 45,5 Ziehungen abwarten, bis eine einzige (bestimmte) Zahl kommt – vielleicht waren erste intuitive Schätzungen

davon gar nicht so weit weg für den Fall, dass man auf alle 15 Zahlen des BINGO-Scheins wartet? Man sieht hier also schon, dass diese Zahl sicher deutlich höher sein muss!

Ohne dass man genauer überlegt, wird man bei den 15 Zahlen des BINGO-Scheins intuitiv die oben schon angedeutete strenge Monotonie vermutlich nicht erahnen, man wird eher vermuten, dass die Wahrscheinlichkeitswerte  $P(X = i)$  beginnend bei einem sehr kleinen Wert für  $i = 15$  langsam wachsen werden, irgendwo ein Maximum erreichen und dann wieder zu  $P(X = 90)$  abfallen. Aber schon bei *einer Zahl* gibt es keine Phase des Abfallens der Wahrscheinlichkeiten (Konstanz!), und wenn man auf mehr Zahlen wartet, so wird sich die „Wahrscheinlichkeitsmasse“ klarerweise nach rechts verschieben, da es mit steigender Anzahl von Zahlen immer schwieriger wird, dass diese alle bald gezogen werden. Dies ist schon eine erste Plausibilitätsklärung für die überraschende Monotonie der Wahrscheinlichkeiten  $P(X = i)$ . Vielleicht hilft hier auch die Erkenntnis, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die *größte* der beiden Augenzahlen beim zweifachen Würfelwurf gleich  $k$  ist, monoton mit  $k$  wächst. In unserem Fall handelt es sich um die *größte* von 15 Wartezeiten (jede der 15 Zahlen auf dem BINGO-Schein muss gezogen werden!).

Natürlich könnte man nun fragen: „Wie wäre die Situation, wenn der BINGO-Schein *zwei* bzw. *drei Zahlen* enthielte?“ Leider ist hier die Sache nicht mehr so einfach wie bei *einer Zahl*, und man muss hier prinzipiell schon in eine der drei angedeuteten Richtungen „denken“ (siehe oben bei 15 Zahlen, oder allgemein siehe unten). Trotzdem wäre es im Unterricht vielleicht hilfreich, Schüler(inne)n den Tipp zu geben, es zuerst einmal mit einem BINGO-Schein mit zwei Zahlen zu versuchen<sup>4</sup>, um diese Erkenntnisse dann auf einen BINGO-Schein mit 15 Zahlen zu übertragen.

## 5 Allgemeine Betrachtungen

Nun lösen wir uns vom *konkreten* BINGO-Problem mit 15 Zahlen auf dem Schein und 90 möglichen Zahlen bzw. Kugeln in einer Urne und betrachten die Situation allgemein.

Es wird aus einer Urne mit den Zahlen  $\{1, 2, \dots, s\}$  gezogen, auf dem BINGO-Schein stehen  $r$  Zahlen. Klarerweise darf man dabei stellvertretend an die Zahlen  $\{1, 2, \dots, r\}$  denken – wegen der Gleichwahr-

<sup>4</sup>Ein bisschen leichter ist es ja vermutlich doch?!

scheinlichkeit aller Reihenfolgen von Nummern gezogener Kugeln. In Analogie zu den Abschnitten 3.1 – 3.3 werden nun die zugehörigen allgemeinen Überlegungen bzw. Formeln erarbeitet. Obwohl die Schritte im Prinzip nicht komplizierter sind als im konkreten Fall, ist es für Schüler(innen) vermutlich eine sehr anspruchsvolle Aufgabe, das in selbständiger Arbeit zu erledigen, auch wenn vorher das konkrete „15 aus 90-BINGO“ thematisiert wurde. Man kommt aber zu *allgemein gültigen Formeln* und *Verallgemeinern* ist ein sehr wichtiges Prinzip in der Mathematik.

### 5.1 Beginn hinten

Man kann die Denkweise „hinten beginnen“ leicht verallgemeinern und kommt zu folgendem Ergebnis:

$$P(X = s) = \frac{r}{s}$$

Für  $\{X = s - 1\}$  muss an der  $s$ -ten Stelle eine aus den anderen  $s - r$  Zahlen gezogen werden, die vorletzte Ziehung muss eine Zahl aus  $b_1, \dots, b_r$  bringen. Daher ergibt sich

$$P(X = s - 1) = \frac{r}{s} \cdot \frac{s - r}{s - 1}$$

Analog erhalten wir

$$P(X = s - 2) = \frac{r}{s} \cdot \frac{s - r}{s - 1} \cdot \frac{s - r - 1}{s - 2}$$

$$P(X = s - 3) = \frac{r}{s} \cdot \frac{s - r}{s - 1} \cdot \frac{s - r - 1}{s - 2} \cdot \frac{s - r - 2}{s - 3}$$

und allgemein

$$P(X = j) = \frac{r \cdot (s - r) \cdot (s - r - 1) \cdot \dots \cdot (j - r + 1)}{s \cdot (s - 1) \cdot \dots \cdot j}$$

bzw.

$$P(X = j) = r \cdot \frac{\binom{s-r}{j-r}}{\binom{s}{j}}, \quad j = r, \dots, s. \quad (4)$$

### 5.2 Binomialkoeffizienten – hypergeometrische Wahrscheinlichkeiten

In der Denkweise mit Binomialkoeffizienten bzw. hypergeometrischen Wahrscheinlichkeiten (vorne beginnen) ergibt sich analog:

$$P(X \leq j) = \frac{\binom{s-r}{j-r}}{\binom{s}{j}}, \quad j = r, \dots, s$$

Durch Differenzbildung

$$P(X = j) = P(X \leq j) - P(X \leq j - 1)$$

erhält man dann nach direkter Rechnung das Resultat

$$P(X = j) = \frac{\binom{j-1}{r-1}}{\binom{s}{r}}, \quad j = r, \dots, s. \quad (5)$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass dieses Ergebnis gleichwertig zu (4) ist.

Die Beziehung  $P(X = s) = r/s$  steht ja am Anfang der Methode „hinten beginnen“, sie folgt aber auch direkt aus Formel (5). Auch die schon angesprochene Monotonie der Wahrscheinlichkeiten (bei „hinten beginnen“ direkt klar) ist hier zu erhalten, denn aus (5) ergibt sich unmittelbar der Zusammenhang (Rekursionsformel,  $j = s - 1, s - 2, \dots, r$ ):

$$P(X = j + 1) = \underbrace{\frac{j}{j - r + 1}}_{>1} \cdot P(X = j)$$

### 5.3 BINGO-Lotto

Wir betrachten die  $r$  Zahlen des Spielers ( $r$  Zahlen am BINGO-Schein) als rote Kugeln und die übrigen  $s - r$  Zahlen als schwarze Kugeln, denn für unsere Fragestellung kommt es gar nicht auf die genauen Zahlen an. Wenn man nun den Text von Abschnitt 3.3 wörtlich übernimmt und sich dabei  $r$  statt 15 bzw.  $s$  statt 90 denkt, so erhält man ganz analog:

$$P(X = j) = \frac{\binom{j-1}{r-1}}{\binom{s}{r}}, \quad j = r, \dots, s \quad (6)$$

Dieses Ergebnis stimmt mit (5) überein und ist äquivalent zu (4).

Auch diese Überlegung liefert direkt Formel für  $P(X = j)$ , ohne dass wir zuerst die Wahrscheinlichkeiten  $P(X \leq j)$  bestimmen müssen.

### 5.4 Erwartungswert

Für den Erwartungswert

$$E(X) = \sum_{j=r}^s j \cdot P(X = j) \quad (7)$$

ergibt sich der geschlossene Ausdruck

$$E(X) = \frac{r \cdot (s + 1)}{r + 1}. \quad (8)$$

Dieses erhält man wie folgt aus (6) und (7): Es ist

$$E(X) = \frac{1}{\binom{s}{r}} \cdot \sum_{j=r}^s j \cdot \binom{j-1}{r-1}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\binom{s}{r}} \cdot r \cdot \sum_{j=r}^s \binom{j}{r} \\ &= \frac{1}{\binom{s}{r}} \cdot r \cdot \binom{s+1}{r+1} \\ &= \frac{r \cdot (s+1)}{r+1}. \end{aligned}$$

Dabei ergibt sich das dritte Gleichheitszeichen am einfachsten aus (5), wenn man  $r$  und  $s$  durch  $r + 1$  bzw.  $s + 1$  ersetzt und bedenkt, dass die Summe über alle Wahrscheinlichkeiten gleich 1 ist<sup>5</sup>:

$$\begin{aligned} P(X = j) &= \frac{\binom{j-1}{r}}{\binom{s+1}{r+1}}, \quad j = r + 1, \dots, s + 1 \\ \Rightarrow \sum_{j=r+1}^{s+1} \frac{\binom{j-1}{r}}{\binom{s+1}{r+1}} &= 1 \quad \Rightarrow \sum_{j=r}^s \binom{j}{r} = \binom{s+1}{r+1} \end{aligned}$$

Ein intuitives Verständnis von (8) gewinnt man wie folgt: Wir stellen uns alle Zahlen von 1 bis  $s$  in einer rein zufälligen Reihenfolge in einem  $s$ -Tupel  $(a_1, a_2, \dots, a_s)$  angeordnet vor (dabei sei  $a_j$  die Nummer der als  $j$ -te gezogenen Kugel). Bezeichnet  $Z_i$  die zufällige Position, an der zum  $i$ -ten Mal eine Zahl aus der Menge  $\{1, 2, \dots, r\}$  gezogen wird, so definieren die Differenzen  $Z_1 - 0, Z_2 - Z_1, Z_3 - Z_2, \dots, Z_r - Z_{r-1}$  und  $(s + 1) - Z_r$  Abstände im Intervall  $[0, s + 1]$ . Diese Abstände haben aus Symmetriegründen die gleiche Verteilung (siehe auch Henze (1995)) und somit den gleichen Erwartungswert. Da die Summe der Abstände gleich  $s + 1$  ist und insgesamt  $r + 1$  Abstände vorliegen, besitzt jeder von ihnen den Erwartungswert  $(s + 1)/(r + 1)$ . Da es bis zur letzten der  $r$  Zahlen eben  $r$  solche Abstände gibt, folgt  $E(X) = r \cdot (s + 1)/(r + 1)$ . Man erhält dadurch auch, dass die Wartezeit, bis irgendwelche  $k$  der  $r$  vorgegebenen Zahlen des BINGO-Scheins aufgetreten sind, den Erwartungswert  $k \cdot (s + 1)/(r + 1)$  besitzt.

Es ist beim Unterricht zu diesem Thema auch sehr gut möglich, sich auf den konkreten Fall mit  $r = 15$  und  $s = 90$  zu beschränken und diese allgemeinen Betrachtungen nicht durchzuführen (dabei ist dann auch schon viel geleistet worden), vielleicht noch ergänzt durch eine ohnehin relativ anspruchsvolle Simulation (z. B. mit EXCEL). Andererseits sind die allgemeinen Betrachtungen in diesem Abschnitt auch kaum komplizierter als im konkreten Fall (siehe Abschnitt 3), daher halten wir es auch für möglich (anspruchsvolle Aufgabe!), dass Schüler(innen) den

<sup>5</sup>Alternativ dazu kann man auch das Gesetz der oberen Summation  $\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$  für Binomialkoeffizienten (siehe Henze (2010), S. 62) verwenden.

allgemeinen Fall dann selbständig bearbeiten, nachdem der konkrete Fall gemeinsam mit der Lehrkraft behandelt wurde. Sie brauchen bei den Wahrscheinlichkeiten  $P(X = j)$  im Wesentlichen ja nur 15 durch  $r$  und 90 durch  $s$  zu ersetzen. Den geschlossenen Ausdruck (8) für den Erwartungswert können Schüler(innen) natürlich nicht in selbständiger Arbeit finden.

## 6 Wartezeit, bis alle Zahlen irgendeiner Reihe auftreten

Die folgenden Überlegungen sind nicht mehr für den Schulunterricht gedacht, sondern eher für die Lehrer(innen)ausbildung. Sie greifen die ersten beiden „Stufen von BINGO“ auf der ersten Seite dieses Aufsatzes auf, sind aber stochastisch gesehen doch anspruchsvoller und sollen hier nur in aller Kürze dargestellt werden (ohne fachdidaktische Kommentare).

Bezeichnet  $X_k$  die Anzahl der nötigen Kugeln, die gezogen werden müssen, bis alle fünf Zahlen der  $k$ -ten Reihe aufgetreten sind ( $k = 1, 2, 3$ ), so müssen

$$Y := \min(X_1, X_2, X_3)$$

Kugeln gezogen werden, bis alle fünf Zahlen irgendeiner Reihe vorgekommen sind. Man beachte, dass  $Y$  die möglichen Werte  $5, 6, \dots, 88$  annimmt, denn spätestens im 88. Zug wird eine von drei Fünferreihen komplettiert.

Da das Ereignis  $\{Y \leq j\}$  genau dann eintritt, wenn mindestens eines der Ereignisse

$$A_k := \{X_k \leq j\}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (9)$$

eintritt, liefert die Formel des Ein- und Ausschlusses (siehe Henze (2010), S. 73)

$$P(Y \leq j) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3).$$

Dabei wurde das Durchschnittszeichen  $\cap$  zwischen Ereignissen der Kürze halber weggelassen. Da die Ereignisse  $A_1, A_2, A_3$  aus Symmetriegründen die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen (man wartet jeweils darauf, dass 5 der 90 Zahlen gezogen werden) und auch die Durchschnitte  $A_1A_2, A_1A_3$  und  $A_2A_3$  gleich wahrscheinlich sind (in diesem Fall wartet man jeweils darauf, dass 10 der 90 Zahlen gezogen werden), gilt

$$P(Y \leq j) = 3P(A_1) - 3P(A_1A_2) + P(A_1A_2A_3).$$

Offenbar ist  $A_1A_2A_3$  gleich dem Ereignis  $\{X \leq j\}$  mit  $X$  wie in Abschnitt 5, was bedeutet, dass  $P(A_1A_2A_3)$

durch die rechte Seite von Gleichung (1) (mit  $s = 90$  und  $r = 15$ ) gegeben ist. Da man im Fall von  $A_1$  bzw.  $A_1A_2$  darauf wartet, dass vorgegebene 5 bzw. 10 Nummern gezogen werden, sind  $P(A_1)$  und  $P(A_1A_2)$  ebenfalls durch die rechte Seite von (1) gegeben, wobei  $s = 90$  sowie einmal  $r = 5$  und einmal  $r = 10$  einzusetzen ist. Es folgt also

$$P(Y \leq j) = 3 \cdot \frac{\binom{85}{j-5}}{\binom{90}{j}} - 3 \cdot \frac{\binom{80}{j-10}}{\binom{90}{j}} + \frac{\binom{75}{j-15}}{\binom{90}{j}},$$

$j = 5, 6, \dots, 88$ . Hierbei verwenden wir die Konvention, dass ein Binomialkoeffizient  $\binom{n}{m}$  im Fall  $m < 0$  zu Null gesetzt wird.

Durch Bildung der Differenz

$P(Y \leq j) - P(Y \leq j-1) = P(Y = j)$  erhält man analog zu Abschnitt 5 das Resultat

$$P(Y = j) = 3 \cdot \frac{\binom{j-1}{4}}{\binom{90}{5}} - 3 \cdot \frac{\binom{j-1}{9}}{\binom{90}{10}} + \frac{\binom{j-1}{14}}{\binom{90}{15}} \quad (10)$$

( $j = 5, 6, \dots, 88$ ). Hierbei vereinbaren wir, einen Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{m}$  mit  $n < m$  zu Null zu setzen.

Im Gegensatz zur Verteilung von  $X$  aus Abschnitt 5 hängen die Wahrscheinlichkeiten  $P(Y = j)$  nicht monoton von  $j$  ab, es gibt ein Maximum bei  $j = 71$ .

Mit Computer und (10) erhält man die in der folgenden Tabelle 2 angegebenen Werte  $P(Y = j)$ .

$j$	$P(Y = j)$	$j$	$P(Y = j)$
88	0,0011	70	0,0327
87	0,0029	69	0,0324
86	0,0053	68	0,0320
85	0,0080	67	0,0315
84	0,0108	66	0,0308
83	0,0137	65	0,0300
82	0,0166	64	0,0291
81	0,0193	63	0,0286
80	0,0218	62	0,0284
79	0,0241	61	0,0282
78	0,0261	60	0,0280
77	0,0279	59	0,0283
76	0,0293	58	0,0284
75	0,0305	57	0,0282
74	0,0315	56	0,0280
73	0,0321	55	0,0289
72	0,0325	54	0,0277
71	0,0327	53	0,0266

**Tabelle 2:** Verteilung der Wartezeit auf irgendeine Reihe von fünf Zahlen beim 90-BINGO



Der Erwartungswert von  $Y$  ergibt sich zu

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{j=5}^{88} j \cdot P(Y = j) \\ &= \frac{11375}{176} \\ &\approx 64,63 \end{aligned}$$

## 7 Wartezeit, bis alle 10 Zahlen zweier beliebiger Reihen auftreten

Es bezeichne  $Z$  die Wartezeit, bis alle 10 Zahlen zweier beliebiger Reihen des BINGO-Scheins auftreten. Da das Ereignis  $\{Z \leq j\}$  genau dann eintritt, wenn *mindestens* zwei der drei in (9) eingeführten Ereignisse  $A_1$ ,  $A_2$  und  $A_3$  eintreten und letzteres Ereignis die Wahrscheinlichkeit

$$P(A_1A_2) + P(A_1A_3) + P(A_2A_3) - 2P(A_1A_2A_3)$$

besitzt (Venn-Diagramm!), so folgt aufgrund der Gleichwahrscheinlichkeit der Ereignisse  $A_1A_2$ ,  $A_1A_3$  und  $A_2A_3$

$$\begin{aligned} P(Z \leq j) &= 3 \cdot P(A_1A_2) - 2 \cdot P(A_1A_2A_3) \\ &= 3 \cdot \frac{\binom{80}{j-10}}{\binom{90}{j}} - 2 \cdot \frac{\binom{75}{j-15}}{\binom{90}{j}}; \end{aligned}$$

hierbei läuft  $j$  von 20 bis 89.

Durch Differenzbildung wie oben ergibt sich die Verteilung von  $Z$  zu

$$P(Z = j) = 3 \cdot \frac{\binom{j-1}{9}}{\binom{90}{10}} - 2 \cdot \frac{\binom{j-1}{14}}{\binom{90}{15}} \quad (11)$$

( $j = 20, 21, \dots, 89$ ).

Tabelle 3 zeigt einige Werte für  $P(Z = j)$ . Auch hier hängen die Wahrscheinlichkeiten  $P(Z = j)$  nicht monoton von  $j$  ab, es gibt ein Maximum bei  $j = 83$ .

$j$	$P(Z = j)$	$j$	$P(Z = j)$
89	0,0187	79	0,0509
88	0,0328	78	0,0479
87	0,0430	77	0,0447
86	0,0500	76	0,0414
85	0,0545	75	0,0380
84	0,0569	74	0,0348
83	0,0577	73	0,0316
82	0,0572	72	0,0285
81	0,0557	71	0,0257
80	0,0536	70	0,0230

**Tabelle 3:** Verteilung der Wartezeit auf irgendwelche zwei der drei Reihen von fünf Zahlen beim 90-BINGO

Analog zu früher erhält man aus (11) den Erwartungswert von  $Z$  zu

$$E(Z) = \frac{6825}{88} \approx 77,56.$$

## Literatur

Ethier, S.N. (2010): The Doctrine of Chances – Probabilistic Aspects of Gambling. Springer, New York u. a.

Henze, N. (1995): The distribution of spaces on lottery tickets. The Fibonacci Quarterly 33, 426–431.

Henze, N. (2010): Stochastik für Einsteiger. 8. Auflage: Verlag Vieweg-Teubner.

Anschriften der Verfasser:

Prof. Dr. Norbert Henze  
 Institut für Stochastik  
 Karlsruher Institut für Technologie (KIT)  
 Kaiserstr. 89–93  
 76131 Karlsruhe  
 Henze@kit.edu

Prof. Dr. Hans Humenberger  
 Fakultät für Mathematik  
 Universität Wien  
 Nordbergstr. 15  
 A-1090 Wien  
 hans.humenberger@univie.ac.at