Binomialkoeffizienten – verstehen oder rechnen?

NORBERT HENZE, KARLSRUHE

Zusammenfassung: *In diesem Aufsatz geht es um Altbekanntes, aber offenbar in Vergessenheit Geratenes, nämlich Konzepte und nachhaltige Erkenntnis im Zusammenhang mit Binomialkoeffizienten. Dabei spielen binäre n-Tupel eine Schlüsselrolle.*

1 Einleitung

Anlass für diesen Artikel ist die für jedes $n \geq 1$ und jedes $k \in \{1,\ldots,n\}$ geltende Rekursionsformel

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \tag{1}$$

für die Binomialkoeffizenten. In Freudigmann et al. (2016) wird diese Formel auf S. 155 (mit n anstelle von $n+1$) anhand des Pascalschen Dreiecks *entdeckt*. Danach erfolgt ein Beweis, indem man jeden dieser Binomialkoeffizienten mithilfe von Fakultäten ausschreibt, den Hauptnenner bildet und anschließend zusammenfasst. Wenn man den Binomialkoeffizienten in der Form

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{2}$$

mit mit $m! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m$ für $m \geq 1$ und $0! := 1$ *definiert*, bleibt einem auch nichts anderes übrig.

Hierdurch wird jedoch nicht *begriffen* (und somit kein nachhaltiges Wissen geschaffen), *warum* die Identität (1) gilt. Definiert man jedoch $\binom{n}{k}$ als Anzahl der Möglichkeiten, aus n Objekten k ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auszuwählen oder – mathematisch exakt ausgedrückt – k-elementige Teilmengen einer n-elementigen Menge zu bilden, so ergibt sich (1) wie folgt ohne jegliches Rechnen durch eine einfache Fallunterscheidung:

Ist das $(n+1)$-te Element bei der k-elementigen Teilmenge dabei, so müssen von den ursprünglichen n Elementen genau $k-1$ dabei sein (ausgewählt werden), und dafür gibt es $\binom{n}{k-1}$ Möglichkeiten. Ist das $(n+1)$-te Element bei der k-elementigen Teilmenge jedoch nicht dabei, so müssen von den ursprünglichen n Elementen k Elemente dabei sein (ausgewählt werden), was auf $\binom{n}{k}$ Weisen möglich ist. Ich bin davon überzeugt, dass nicht nur Ihre geistig agileren Schülerinnen und Schüler diese Fallunterscheidung nachvollziehen können und die Kraft eines Konzeptes zugunsten von stupidem Rechnen zu schätzen wissen.

Die Erkenntnis, zum Nachweis von (1) allein kurz nachdenken und nicht rechnen zu müssen, findet man nicht nur in Engel (1987, S. 14), sondern auch in früheren Schulbüchern wie etwa in Glaser et al. (1982, S. 45). In anderen Büchern wie z.B. Feuerpfeil et al. (1994) oder Barth und Haller (1985) liest man die Aufforderung „Beweisen Sie:“ im Zusammenhang mit (1). Das Wort *beweisen*, welches das Kerngeschäft der Mathematik kennzeichnet, ist mittlerweile fast durchgängig zugunsten eines stereotypen „Man kann zeigen, dass ...“ aus den Schulbüchern verschwunden. Im Buch Lergenmüller et al. (2012) erfährt man nach direkter Verallgemeinerung des Spezialfalls $n = 5$ und $k = 3$, dass es $\binom{n}{k}$ verschiedene Möglichkeiten gibt, aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln k Kugeln ohne Berücksichtigung der Reihenfolge zu ziehen. Die Einsichten vermittelnde Gleichung (1) tritt jedoch nicht auf, und zur konkreten Berechnung von Binomialkoeffizienten wird unter anderem auf das Handbuch zum grafikfähigen Taschenrechner verwiesen.

Mit diesem Aufsatz möchte ich am Beispiel der Binomialkoeffizienten zu einer schon seit einiger Zeit geführten Grundsatzdiskussion über die Entfachlichung der Schulmathematik zugunsten einer falsch und oberflächlich verstandenden Kompetenzorientierung (die zu einem guten Teil Lesekompetenz bei textintensiven Aufgaben mit vermeintlichem Anwendungsbezug bedeutet) beitragen. Es ist ernüchternd. dass ein Aufsatz wie Kaenders und Weiss (2017) oder ein Buch wie Kaube (2019) erscheinen (müssen).

Das Schulgutachten wies mich darauf hin, dass man diesen Artikel auch als Plädoyer für das etwas in Vergessenheit geratene Fächerbelegungsmodell verstehen kann, das die Grundvorstellungen zum Münzwurf und zum Ziehen aus einer Urne ergänzt. Man sollte im Unterricht also keinesfalls alles auf binäre Tupel reduzieren, sondern stets die geistige Beweglichkeit fördern.

2 Binomialkoeffizienten – Konzept und Folgerungen

Was wäre, wenn man für jedes $n \geq 1$ und jedes k mit $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ das Symbol $\binom{n}{k}$ als Anzahl der Möglichkeiten, aus n verschiedenen Objekten k Stück ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auszuwählen, *definieren würde*? Fragen Sie Ihre Schülerinnen und Schüler nach dieser Definition doch einmal, was $\binom{5}{2}$ ist! Ein wichtiger, hier ablaufender Abstraktionsprozess mündet in der Erkenntnis, dass es auf die fünf Objekte, von denen zwei auszuwählen sind, nicht ankommt. In Abb. 1 sind es die Objekte *Ball*, *Heft*, *Sofa*, *Buch* und *Dose*, und durch Ankreuzen wurden das Heft und die Dose ausgewählt.

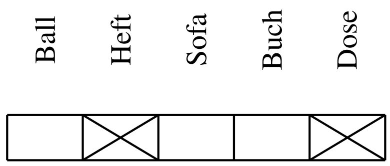

Abb. 1: Aus 5 Objekten werden 2 ausgewählt

Schülerinnen und Schüler erkennen hier schnell, dass es sich um ein „2 aus 5-Lotto“ handelt, wenn man den Ball mit der Zahl 1, das Heft mit der Zahl 2, das Sofa mit der Zahl 3, das Buch mit der Zahl 4 und die Dose mit der Zahl 5 identifiziert. Durch Abzählen aller Möglichkeiten wird sich nach relativ kurzer Zeit herausstellen, dass $\binom{5}{2} = 10$ gilt. Selbstverständlich erhebt sich hier die Frage, ob es eine Formel gibt, mit deren Hilfe man ganz allgemein $\binom{n}{k}$ ausrechnen kann. Aber stellen wir das Rechnen für einen Augenblick zurück!

Eine andere Möglichkeit, eine Zweier-Auswahl der Zahlen 1,2,3,4,5 (und damit aus jeder Menge von fünf verschiedenen Objekten) zu treffen, besteht darin, im heutigen digitalen Zeitalter ein 5-Tupel aus zwei Einsen und drei Nullen zu bilden. Das 5-Tupel $(0,1,0,0,1)$ codiert *definitionsgemäß* die in Abb. 1 gezeigte Auswahl, weil es genau an der zweiten und an der fünften Stelle eine Eins und an den anderen Stellen eine Null aufweist. Was passiert, wenn wir für jedes $n \geq 1$ als *binäres n*-Tupel ein n-Tupel aus lauter Nullen und Einsen bezeichnen und für jedes $k \in \{0,\dots,n\}$ folgende Festlegung treffen?

Definition: $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl aller binären n-Tupel, in denen genau k Einsen (und damit $n-k$ Nullen) auftreten.

Da es nur ein binäres n-Tupel mit lauter Nullen und nur ein n-Tupel mit lauter Einsen gibt, folgt

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}. \tag{3}$$

Das erste Tupel (also das aus lauter Nullen) beschreibt die leere Menge, also die Auswahl von keiner der Zahlen $1,\dots,n$, und das aus lauter Einsen bestehende zweite Tupel steht für die Möglichkeit, jede der Zahlen $1,\dots,n$ auszuwählen. Da man aus diesen Zahlen auf genau n Weisen eine Zahl auswählen kann, gilt

$$\binom{n}{1} = n. \tag{4}$$

Jetzt kommt ein Symmetrieargument: Wenn wir im 5-Tupel $(0,1,0,0,1)$, das die Auswahl in Abb. 1 beschreibt, die Einsen und die Nullen „flippen“, also die Nullen in Einsen überführen und umgekehrt, so entsteht das 5-Tupel $(1,0,1,1,0)$ mit drei Einsen und zwei Nullen. Wenn wir noch einmal flippen, so ergibt sich das 5-Tupel, mit dem wir gestartet waren. Dieses Flippen können wir allgemein mit jedem n-Tupel, das k Einsen und $n-k$ Nullen enthält, machen. Nach dem Flippen entsteht ein n-Tupel mit $n-k$ Einsen und k Nullen, und wenn wir noch einmal flippen erhalten wir das n-Tupel, mit dem wir gestartet waren, zurück. Die Erkenntnis lautet: Es gibt genauso viele binäre n-Tupel mit k Einsen wie es binäre n-Tupel mit $n-k$ Einsen gibt, und sie drückt sich in der Symmetriebeziehung

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{5}$$

aus. Mathematisch beschreibt das geflippte Tupel die zu einer k-Auswahl von $\{1,\dots,n\}$ komplementäre Auswahl, also genau diejenigen $n-k$ Zahlen, die nicht ausgewählt wurden.

Für $k=1$ folgt aus (5) und (4) die Gleichung

$$\binom{n}{n-1} = n.$$

Wir erhöhen jetzt n um 1 und wählen ein k mit $k \in \{1,\dots,n\}$. Nach Definition gibt es $\binom{n+1}{k}$ binäre $(n+1)$-Tupel mit genau k Einsen. Für jedes dieser Tupel gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder an der letzten – also an der $(n+1)$-ten – Stelle steht keine Eins, oder an dieser Stelle steht eine Eins. Im ersten Fall müssen sich die k Einsen auf die ersten n Stellen des Tupels verteilen, und *definitionsgemäß* gibt es dafür $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten. Im zweiten Fall müssen von den ersten n Stellen des Tupels noch $k-1$ Stellen für die fehlenden Einsen ausgewählt werden. Wiederum *nach Definition* des Binomialkoeffizienten gibt es hierfür $\binom{n}{k-1}$ Möglichkeiten, Durch diese Fallunterscheidung erhalten wir ohne jegliche Rechnung (denn wir wissen ja noch nicht, wie man Binomialkoeffizienten *ausrechnet*) die Gleichung (1).

Die Randbedingungen (3) sind zusammen mit der Rekursionsformel (1) und der Festlegung $\binom{0}{0} := 1$ das *Bildungsgesetz* des Pascalschen Dreiecks:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
\iddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots
\end{array}
$$

Abb. 2: Pascalsches Dreieck

In diesem Dreieck steht $\binom{n}{k}$ an der $(k+1)$-ten Stelle in der $(n+1)$-ten Zeile. Mit der Rekursionsformel (1) kann man das Pascalsche Dreieck jetzt um weitere Zeilen ergänzen.

Wie erhält man nun die Berechnungsformel (2), die ja als die übliche Schul-Definition der Binomialkoeffizienten fungiert? Alles, was man dafür benötigt, ist, dass es allgemein

$$m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-(\ell-1)) \tag{6}$$

Möglichkeiten gibt, aus m verschiedenen Objekten ℓ Stück *unter Beachtung der Reihenfolge* auszuwählen sowie einen Grundsatz, den A. Engel (Engel 1987, S. 12) als *namenloses Zählprinzip* bezeichnet hat. In Henze et al. (2021, S. 12) firmiert dieser Grundsatz unter der Bezeichnung *Zwei-Weisen-Zählprinzip*. Dieses Prinzip lautet: Wenn man die Elemente einer Menge auf zwei verschiedene Arten abzählen kann, sind die dabei entstehenden beiden Anzahlen gleich.

Um das Zwei-Weisen-Zählprinzip in Aktion zu sehen, diene das Beispiel $n = 7$ und $k = 3$. Wir wollen also aus sieben Zahlen drei unter Berücksichtigung der Reihenfolge auswählen. Hierfür gibt es nach (6) genau $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ Möglichkeiten (Zählweise 1). Bei der zweiten Zählweise achtet man zunächst nicht auf die Reihenfolge und wählt drei Zahlen „mit einem Griff“ aus. Hierfür gibt es *definitionsgemäß* $\binom{7}{3}$ Möglichkeiten. Dabei ist jede dieser Möglichkeiten durch ein binäres 7-Tupel mit genau 3 Einsen dargestellt. Kennzeichnet man die drei Einsen durch Indizierung mit den Zahlen 1,2,3, so wird die geforderte Reihenfolge festgelegt, in der die drei Zahlen, die den Stellen mit Einsen im Tupel entsprechen, ausgewählt werden. So sind etwa (4,1,6) und $(1_2,0,0,1_1,0,1_3,0)$ zwei Seiten ein und derselben Medaille. Das Tripel (4,1,6) besagt, dass zuerst die 4, dann die 1 und danach die 6 ausgewählt wurde. Die gleiche Information beinhaltet das 7-Tupel. Da an der ersten, der vierten und der sechsten Stelle Einsen stehen, wurden die 1, die 4 und die 6 ausgewählt. Die Indizierung 1_ℓ mit $\ell \in \{1,2,3\}$ bedeutet, dass die dazu korrepondierene Stelle im Tupel unter den Stellen, die Einsen aufweisen, als ℓ-te ausgewählt wurde. Nach dem Zwei-Weisen-Zählprinzip ergibt sich

$$210 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = \binom{7}{3} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

und damit $\binom{7}{3} = 35$.

Allgemein gibt es

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Möglichkeiten, von den Zahlen $1,\ldots,n$ eine k-Auswahl *unter Beachtung der Reihenfolge* zu treffen. Wir können eine solche Auswahl auch so vernehmen, dass wir erst k Zahlen mit einem Griff ziehen, was nach Definition auf $\binom{n}{k}$ binäre n-Tupel mit genau k Einsen führt. Für jedes solche n-Tupel kennzeichnen wir durch Indizierung der k Einsen mit den Zahlen $1,\ldots,k$ eine konkrete Reihenfolge, in der die Zahlen, die zu den Stellen mit den Einsen korrepondieren, gezogen werden. Für diese Kennzeichnung gibt es $k! = k(k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten. Nach dem Zwei-Weisen-Zählprinzip folgt

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k!,$$

und wir erhalten (2), aber *nicht per definitionem*, sondern aufgrund eines Konzeptes (binäre n-Tupel) und eines *Zwei-Weisen-Zählprinzips*.

3 Weitere Einsichten

Ich möchte noch andeuten, welche weiteren Einsichten sich durch die Verwendung binärer Tupel als Strukturierungselemente und Ergebnisse mehrstufiger Zufallsexperimente mit je zwei Ausgängen ergeben können.

3.1 Die Formel von Bernoulli

Bekanntlich ist die Verteilung einer Zufallsgröße X mit der Binomialverteilung $\mathrm{Bin}(n,p)$ durch die sog. *Formel von Bernoulli* gegeben:

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0,\ldots,n. \tag{7}$$

Die Herleitung dieser Formel geschieht in Schulbüchern ausnahmslos mithilfe von Baumdiagrammen. Solche Diagramme, deren Einsatz auf den Fall $n \leq 5$ beschränkt bleibt, legen aber im Zusammenhang mit der Binomialverteilung falsche Fährten, denn bei n unabhängigen Bernoulli-Versuchen „verzweigt sich nichts“, da Ereignisse, die sich auf unterschiedliche Bernoulli-Versuche beziehen, stochastisch unabhängig sind, siehe z.B. Abschn. 12.4 von Henze et al. (2021). Aus diesem Grund ist ein Baumdiagramm im Zusammenhang mit der Binomialverteilung „langweilig“, weil auf jeder Stufe die von jedem Knoten ausgehenden beiden Pfeile immer die Wahrscheinlichkeiten p und $q := 1-p$ besitzen, siehe Abb. 3.

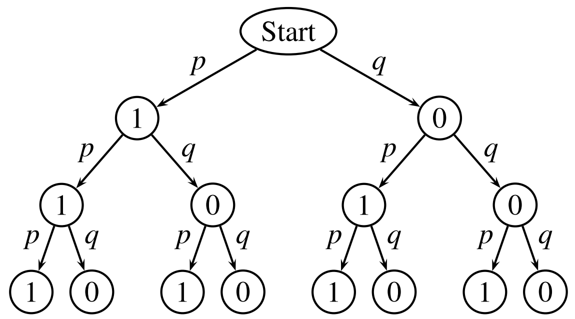

Abb. 3: Ein „langweiliges“ Baumdiagramm

Man kann also die n Versuche *in beliebiger Reihenfolge* oder sogar *zeitgleich* durchführen. Diese Formulierungen deuten den für die Genese der Binomialverteilung grundlegenden Aspekt der stochastischen Unabhängigkeit von Ereignissen an, siehe z.B. Henze et al. (2021, Abschn. 12.4) für Möglichkeiten der Umsetzung im Unterricht. Im Zusammenhang mit der Binomialverteilung sind binäre n-Tupel die natürlichen Ergebnisse, da n Versuche mit je zwei möglichen Ergebnissen durchgeführt werden. So beschreibt etwa das 5-Tupel $(0,1,0,0,1)$ so kompakt wie möglich, dass bei fünf Bernoulli-Versuchen der zweite und der fünfte Versuch je einen Treffer und die anderen jeweils Nieten ergeben haben. Der Nutzen eines Baumdiagramms erschließt sich hier schwer. Ganz allgemein besteht der Vorteil von binären n-Tupeln zur Darstellung der Ergebnisse von n Bernoulli-Versuchen auch darin, dass sie den Fokus der stochastischen Unabhängigkeit und einen damit einhergehenden Symmetrieaspekt viel besser zur Geltung bringen. Die Wahrscheinlichkeit eines solchen n-Tupels hängt nur von der Anzahl seiner Einsen ab, aber nicht davon, an welchen Stellen die Einsen im Tupel stehen. Weist das Tupel k Einsen auf, so ist seine Wahrscheinlichkeit gleich $p^k(1-p)^{n-k}$. Da es *definitionsgemäß* $\binom{n}{k}$ binäre n-Tupel mit genau k Einsen gibt, folgt die Formel (7) von Bernoulli.

3.2 Der binomische Lehrsatz

Sind a und b reelle Zahlen, so ergibt sich $(a+b)^n$, indem man in dem n Faktoren umfassenden Produkt

$$(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)$$

aus jeder der n Klammern entweder a oder b wählt und das Produkt dieser Terme bildet. Da es für jede der n Klammern zwei mögliche Auswahlen für einen Summanden gibt, entstehen 2^n solche Produkte, die danach alle addiert werden müssen. Wegen der Kommutativität der Multiplikation kommt es bei jedem dieser Produkte nur darauf an, aus wie vielen der Klammern das a und aus wie vielen das b gewählt wurde. Jede Auswahl können wir mithilfe eines binären n-Tupels beschreiben. Dabei stehe für jedes $j \in \{1,\ldots,n\}$ an der j-ten Stelle eines solchen Tupels eine Eins bzw. eine Null, falls aus der j-ten Klammer a bzw. b gewählt wurde. Wählt man aus genau k der Klammern das a, so ergibt sich das Produkt $a^k b^{n-k}$. Da es *definitionsgemäß* $\binom{n}{k}$ binäre n-Tupel mit genau k Einsen gibt, tritt also das Produkt $a^k b^{n-k}$ genau $\binom{n}{k}$ mal auf. Jetzt muss man noch über die möglichen Werte von k summieren und erhält den *binomischen Lehrsatz*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \tag{8}$$

Dieser tritt in früheren Schulbüchern wie etwa in Glaser et al. (1982, S. 42) auf. Im Buch Barth und Haller (1985, S. 115) ist er sogar (nur) als Übungsaufgabe formuliert! Es ist klar, dass ein formaler Beweis von (8) mithilfe vollständiger Induktion keinerlei Erkenntnis bringt, *warum* dieser binomische Lehrsatz gilt. Nach Jahrzehnten konzeptioneller und inhaltlicher Abrüstung im gymnasialen Mathematikunterricht ist es jedoch kaum verwunderlich, dass man sich heute darauf beschränkt, durch Rechnen die – wenn man sie einmal begriffen hat – selbstverständliche Gleichung (8) nur für spezielle Werte von n, $n \leq 6$, hinzuschreiben.

3.3 Die Hockeyschlägerregel

Addiert man im Pascalschen Dreieck vom rechten Rand kommend und nach links unten gehend Zahlen auf, so ist deren Summe gleich dem rechts unterhalb des letzten Summanden stehenden Eintrag im Dreieck. Aufgrund der Gestalt der dabei beteiligten Einträge wird dieser Sachverhalt bisweilen als „Hockeyschlägerregel“ bezeichnet, siehe Abb. 4.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & \boxed{1} & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & \boxed{3} & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & \boxed{6} & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & \boxed{10} & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & \boxed{20} & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
\cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots
\end{array}
$$

Abb. 4: Zur Hockeyschlägerregel

Allgemein besagt das *Gesetz der oberen Summation*, dass für beliebige nichtnegative ganze Zahlen mit der Eigenschaft $n \geq k$ die Identität

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n}{k} \qquad (9)$$

gilt. Diese folgt direkt mithilfe der Definition der Binomialkoeffizienten und einer Fallunterscheidung hinsichtlich der letzten Eins im Tupel. Warum? Nun, links steht die Anzahl aller binären $(n+1)$-Tupel mit $k+1$ Einsen. Wir unterscheiden diese Tupel danach, an welcher Stelle im Tupel (von links nach rechts gelesen) die *letzte* Eins steht. Diese Stelle ist mindestens gleich $k+1$ und höchstens gleich $n+1$. Ist sie gleich $k+j$ mit $j \in \{1,\ldots,n+1-k\}$, so stehen links davon (d.h. auf den Stellen von 1 bis $k+j-1$) genau k Einsen, was *definitionsgemäß* auf $\binom{k+j-1}{k}$ Weisen möglich ist. Da man wegen der Fallunterscheidung noch über die Werte von j summieren muss, ist das Gesetz (9) der oberen Summation bewiesen (siehe auch Henze 2019b).

3.4 Warten auf ein *Bingo*!

Eine schöne Anwendung dieses Gesetzes ist das Warten auf ein *Bingo!* beim gleichnamigen Spiel (siehe z.B. Henze et al. 2021, Kapitel 6, wo konkrete Vorschläge für die Umsetzung dieses Problems im Unterricht gemacht werden). Eine Formulierung dieses Problems in einem Urnenmodell lautet wie folgt: Eine Urne enthalte n Kugeln, von denen r rot seien $(1 \leq r < n)$. Es werden der Urne rein zufällig *nacheinander ohne Zurücklegen* Kugeln entnommen. Die Zufallsgröße X bezeichne die Anzahl der nötigen Züge, bis *jede rote Kugel* gezogen wurde

Der Schlüssel zur Beantwortung dieser Frage sind wiederum binäre n-Tupel. Wir ziehen gedanklich alle n Kugeln nacheinander und notieren jeweils eine Eins bzw. eine Null, wenn eine rote bzw. keine rote Kugel gezogen wird. Da das Ziehen rein zufällig erfolgt, sind alle n-Tupel, die r Einsen aufweisen, gleich wahrscheinlich, und das sind *definitionsgemäß* $\binom{n}{r}$ Stück. Die Zufallsgröße X nimmt die möglichen Werte $r, r+1, \ldots, n$ an. Für ein $j \in \{r, r+1, \ldots, n\}$ tritt das Ereignis $\{X = j\}$ genau dann ein, wenn an der j-ten Stelle des binären n-Tupels eine Eins steht und sich auf den ersten $j-1$ Stellen genau $r-1$ Einsen befinden, wenn also vor der j-ten Stelle ein binäres $(j-1)$-Tupel mit genau $r-1$ Einsen auftritt. Diese Anzahl ist *definitionsgemäß* gleich $\binom{j-1}{r-1}$. Die Zufallsgröße X besitzt also die Verteilung

$$\mathbb{P}(X = j) = \frac{\binom{j-1}{r-1}}{\binom{n}{r}}, \qquad j = r, \ldots, n,$$

und damit den Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{j=r}^{n} j \cdot \binom{j-1}{r-1}.$$

Dies kann man leicht zeigen, denn wegen

$$j\binom{j-1}{r-1} = r\binom{j}{r}$$

folgt

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r}{\binom{n}{r}} \sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r},$$

und das Gesetz (9) (mit $k := r$) ergibt

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r}{\binom{n}{r}} \binom{n+1}{r+1} = \frac{r(n+1)}{r+1}.$$

Beim Spiel *Bingo!* gelten $n = 90$ und $r = 15$, da man 15 von 90 Zahlen ankreuzt. Die roten Kugeln entsprechen hier den 15 Zahlen auf dem Spielschein. In diesem Fall ergibt sich der kontraintuitiv (!?) hohe Erwartungswert $\mathbb{E}(X) = 83{,}3125$. Über diesbezügliche Erfahrungen mit Schülerinnen und Schülern der zehnten Jahrgangsstufe berichtet das Video Henze (2019a). Deutet man jedoch X als größte Gewinnzahl bei einem 15-aus-90-Lotto, so wird dieser Erwartungswert plausibel.

3.5 Die hypergeometrische Verteilung

Die hypergeometrische Verteilung spielt unter anderem in der Qualitätskontrolle eine große Rolle. Sie war früher in Schulbüchern vertreten (siehe z.B. Glaser et al. 1982, S. 233, oder Barth und Haller 1985, S. 233), ist aber wohl auch der Entfachlichung zum Opfer gefallen. Dabei entsteht sie quasi als Nebenprodukt, wenn man die Bedeutung des Binomialkoeffizienten verstanden hat.

In einer Urne befinden sich r rote und s schwarze Kugeln, wobei in der Qualitätskontrolle die roten

Kugeln defekten und die schwarzen Kugeln intakten Einheiten einer Warenlieferung entsprechen. Es werden der Urne *rein zufällig ohne Zurücklegen* n Kugeln entnommen. Die Zufallsgröße X modelliere die Anzahl der dabei erhaltenen roten Kugeln. Welche Verteilung besitzt X?

Wir setzen der Einfachheit halber $r \geq n$ und $s \geq n$ voraus, sodass X jeden der Werte $k \in \{0,\ldots,n\}$ annehmen kann. Die entscheidende Idee, um leicht an die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X = k)$ zu gelangen, besteht darin, gedanklich *alle* $r+s$ *Kugeln* der Reihe nach zu ziehen, obwohl uns nur die Anzahl der roten Kugeln unter den ersten n gezogenen interessiert. Notieren wir im Laufe der Stichprobenziehung stets eine Eins bzw. eine Null, wenn eine rote bzw. eine schwarze Kugel gezogen wird, so ergibt sich am Ende ein binäres $(r+s)$-Tupel mit genau r Einsen. Wegen des reinen Zufalls sind alle solche Tupel gleich wahrscheinlich, und *definitionsgemäß* ist deren Anzahl gleich $\binom{r+s}{r}$.

Die für das Eintreten des Ereignisses $\{X = k\}$ günstigen unter diesen Tupeln haben an den ersten n Stellen genau k Einsen und an den weiteren $r+s-n$ Stellen $r-k$ Einsen. *Definitionsgemäß* ist $\binom{n}{k}$ die Anzahl der binären n-Tupel mit k Einsen, und für jedes solche *Tupel* gibt es wiederum *definitionsgemäß* $\binom{r+s-n}{r-k}$ binäre Tupel der Länge $r+s-n$ mit $r-k$ Einsen. Da ein Laplace-Modell vorliegt, liefert die Multiplikationsregel der Kombinatorik

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{n}{k}\binom{r+s-n}{r-k}}{\binom{r+s}{r}}, \quad k = 0,\ldots,n. \tag{10}$$

Schreibt man diese Binomialkoeffizienten mithilfe von Fakultäten aus, so folgt die übliche Darstellung

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}}, \quad k = 0,\ldots,n. \tag{11}$$

Diese mag instruktiver erscheinen als (10), aber auch die Herleitung von (11) sollte mit einer Herausarbeitung einer Egebnismenge verbunden sein, um auf sicherem Boden zu stehen (siehe z.B. Henze 2021, Kap. 13).

4 Fazit

Dieser Artikel ist ein Plädoyer dafür, im gymnasialen Mathematikunterricht die Wertigkeit von Konzepten und Rezepten zu überdenken und Konzepten wieder breiteren Raum zu geben. Ein Beispiel dafür sind binäre n-Tupel. Ich bin davon überzeugt, dass Schülerinnen und Schüler diese Tupel im Zusammenhang mit der binomischen Formel und der Binomialverteilung zu schätzen wissen.

Danksagung: Ich danke für wertvolle Hinweise durch die anonymen Gutachten sowie von Reimund Vehling und Joachim Engel.

Literatur

Barth, F.; Haller, R. (1985): Stochastik. Leistungskurs. München: Ehrenwirth.

Engel, A. (1987): Stochastik. Klett Studienbücher. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Feuerpfeil, J.; Heigl, F.; Wiedling, H. (1994): Praktische Stochastik. 2. Auflage. München: Bayerischer Schulbuchverlag.

Freudigmann, H. et al. (2016): Lambacher Schweizer 10. Mathematik für Gymnasien Baden–Württemberg. Klett: Stuttgart.

Glaser et al. (Hrsg.) (1982): Sigma: Grundkurs Stochastik. Klett: Stuttgart.

Henze, N. (2019a): Bingo! Wir irren uns empor. Erklärvideo.
https://doi.org/10.5445/DIVA/2020-37

Henze, N. (2019b): Binomialkoeffizienten: Das Gesetz der oberen Summation. Erklärvideo.
https://doi.org/10.5445/DIVA/2020-38

Henze, N. (2021): Stochastik für Einsteiger. 13. Auflage. Heidelberg: Springer Spektrum.

Henze, N.; Müller, K.; Schilling, J. (2021). Stochastik rezeptfrei unterrichten – Anregungen für spannende Lehre über den Zufall: Heidelberg: Springer Spektrum.

Kaenders, R., und Weiss, Y. (2017): Mathematische Schneeschmelze. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 25 (2), S. 82–88.

Kaube, J. (2019): Ist die Schule zu blöd für unsere Kinder? 2. Auflage, Berlin: Rowohlt.

Lergenmüller et al. (Hrsg.) (2012): Mathematik Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien. Stochastik. Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage.

Anschrift des Verfassers:
Prof. i.R. Dr. Norbert Henze
KIT Distinguished Senior Fellow
Institut für Stochastik
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Englerstr. 2
76131 Karlsruhe
`Henze@kit.edu`