Weg mit der Bernoulli-„Kette“!

Norbert Henze, Karlsruhe

Zusammenfassung: *Es scheint ein unerklärliches Spezifikum des deutschen Sprachraums zu sein, mehrere völlig unbeeinflusst voneinander ablaufende* unabhängige *Bernoulli-Versuche als Bernoulli-*Kette *zu bezeichnen. Da der Wortteil* Kette *eher Assoziationen an das Gegenteil von Unabhängigkeit, nämlich starke Abhängigkeiten weckt, legt er für Schülerinnen und Schüler falsche Fährten. Ich plädiere dafür, den Begriff* Bernoulli-Kette *im Hinblick auf den schulischen Unterricht zu überdenken und wie im angelsächsischen Sprachraum die Termini* Bernoulli-Prozess *oder* Bernoulli-Folge *zu verwenden. Damit einher geht der Wunsch, im Zusammenhang mit der Binomialverteilung im Rahmen der schulischen Möglichkeiten für den Begriff der stochastischen Unabhängigkeit zu sensibilisieren.*

1 Einleitung

In diesem Aufsatz geht es um die in der Schule momentan als Schlüsselkonzept geltende Binomialverteilung. Untrennbar damit verbunden ist ein Terminus, der außerhalb des deutschen Sprachraums seinesgleichen sucht, nämlich der Wortteil „Kette“ im Zusammenhang mit unabhängigen Bernoulli-Versuchen[1]. Während man mit einer *Kette* gemeinhin mehr oder weniger stark miteinander verbundene Glieder eines Ganzen assoziiert, regiert bei unabhängigen Bernoulli-Versuchen ein völlig freier, ja geradezu „revolutionärer“ Zufall. Das Adjektiv *revolutionär* bezieht sich etwa darauf, dass man im Mittel unendlich viele Würfe benötigt, bis beim fortgesetzten Werfen einer fairen Münze gleich oft Zahl und Wappen aufgetreten sind (siehe z.B. Henze (2022a)).

Dass die Binomialverteilung untrennbar mit dem Begriff der stochastischen Unabhängigkeit von Ereignissen verknüpft ist, wurde früher in Schulbüchern thematisiert (siehe z.B. Barth und Haller (1985), S. 229 ff). Wie wir sehen werden, existieren im Zuge der Entfachlichung der Schulmathematik (eine Bestandsaufnahme für die Stochastik gibt Henze (2018)) diesbezüglich heutzutage Halbwahrheiten und sogar unwahre Behauptungen. Ich plädiere auch dafür, Baumdiagramme im Zusammenhang mit der Binomialverteilung kritisch zu hinterfragen, weil sie (abgesehen von den physikalisch notwendigen beim Galton-Brett) Verzweigungen suggerieren, die nicht vorhanden sind. „Unabhängige“ Bernoulli-Versuche können nämlich unter Umständen (und rein gedanklich immer) zeitgleich oder in getrennten Räumen stattfinden. Die konsequente Verwendung binärer Tupel legt diesbezüglich keine falschen Fährten.

2 Baumdiagramme und die Binomialverteilung

Die herausragende Rolle von Baumdiagrammen bei der Lösung von Aufgaben im Zusammenhang mit mehrstufigen stochastischen Vorgängen ist unbestritten, siehe z.B. Schilling und Krüger (2022). Als Beispiel diene das zweimalige rein zufällige Ziehen aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln, wobei die beim ersten Zug erhaltene Kugel *nicht* zurückgelegt wird. Wir deuten das Ziehen einer roten bzw. einer schwarzen Kugel als *Treffer* (1) bzw. als *Niete* (0). Abbildung 1 zeigt das zugehörige Baumdiagramm, wie man es mit konkreten Zahlen für r und s in Schulbüchern für die 8. Jahrgangsstufe antrifft.

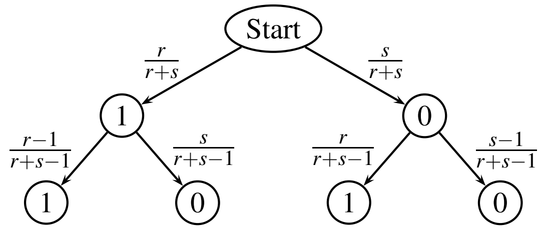

Abb. 1: Baumdiagramm zum Ziehen ohne Zurücklegen

Mit der Abkürzung $(r+s)_2 := (r+s)(r+s-1)$ besitzen die vier möglichen Ergebnisse $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,1)$ und $(0,0)$ dieses zweistufigen stochastischen Vorgangs nach der auch *Produktregel* genannten ersten Pfadregel die Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} p(1,1) &= \frac{r(r-1)}{(r+s)_2}, \quad p(1,0) = \frac{rs}{(r+s)_2}, \\ p(0,1) &= \frac{rs}{(r+s)_2}, \quad p(0,0) = \frac{s(s-1)}{(r+s)_2}. \end{aligned}$$

Schülerinnen und Schüler erfahren hier die Bedeutung der an den Pfeilen der zweiten Stufe stehenden *bedingten Wahrscheinlichkeiten* (ohne diesen Begriff in der Jahrgangsstufe 8 kennenzulernen), um

[1] Zu meiner Schande habe ich diesen Terminus bei Publikationen mit schulnahem Charakter früher selbst verwendet.

Wahrscheinlichkeiten für Ergebnisse des zweistufigen Vorgangs zu erhalten. Was sie nicht erfahren (zumindest habe ich das den beiden aktuellen Schulbüchern Freudigmann u.a. (2017) und Lergenmüller u.a. (2012) nicht entnehmen können), ist folgender erhellende Sachverhalt, der das in Henze u.a. (2021) oft angeführte „Stochastikgespür“ fördert: Es liegen zwei Bernoulli-Versuche vor, denn definitionsgemäß hat ein Bernoulli-Versuch zwei mögliche Ausgänge. Die Ergebnismenge des zweistufigen Versuchs sei mit $\Omega := \{(1,1),(1,0),(0,1),(1,1)\}$ bezeichnet. Dann ist $A_1 := \{(1,0),(1,1)\}$ das Ereignis „Treffer im ersten Zug (Versuch)“, und $A_2 := \{(1,1),(0,1)\}$ steht für das Ereignis, dass der zweite Versuch einen Treffer ergibt. Mit der Summenregel gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1) &= p(1,0)+p(1,1) \\ &= \frac{rs}{(r+s)_2}+\frac{r(r-1)}{(r+s)_2} = \frac{r}{r+s}. \end{aligned}$$

Dieses Resultat ist unmittelbar klar, denn es ist die Trefferwahrscheinlichkeit für den ersten Versuch, für den man ja die zweite Stufe überhaupt nicht benötigt. Von höherer Warte aus muss man sich aber verdeutlichen, was $\mathbb{P}$ ist. Die mit

$$p := \frac{r}{r+s} \tag{1}$$

abgekürzte Wahrscheinlichkeit von A_1 ist also gleich dem relativen Anteil der roten Kugeln vor dem ersten Zug. Fragen Sie Ihre Schülerinnen und Schüler doch einmal nach der Wahrscheinlichkeit von A_2! Sie werden vielleicht die Antwort erhalten, dass das Ereignis, einen Treffer im zweiten Versuch zu landen, ja davon abhängt, was im ersten Zug passiert, denn Schülerinnen und Schüler sehen das Baumdiagramm vor sich. Sie bestimmen die Wahrscheinlichkeit von A_2 „nach Rezept“ mit der zweiten Pfadregel zu

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_2) &= p(1,1)+p(0,1) \\ &= \frac{r(r-1)}{(r+s)_2}+\frac{rs}{(r+s)_2} \\ &= \frac{r}{r+s} = p. \end{aligned}$$

Interessanterweise gilt $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = p$, und man stellt auf Schulniveau mit etwas Fleiß fest, dass auch ein dritter Versuch (Zug) mit der Wahrscheinlichkeit p einen Treffer ergibt. Wenn Schülerinnen und Schüler *begreifen* wollen, *warum* sich die Trefferwahrscheinlichkeit beim Ziehen *ohne Zurücklegen* nicht ändert (beim Ziehen *mit* Zurücklegen ist das natürlich klar), können Sie ihnen ja die Frage stellen: Hat nicht von Anfang an jede der $r+s$ Kugeln die gleiche Chance, als zweite oder als dritte gezogen zu werden? Ein Erklärvideo hierzu ist Henze (2020).

Im Buch Griesel u.a. (2003) liest man auf S. 116:

> Wird ein Bernoulli-Versuch n-mal durchgeführt und ändert sich die Wahrscheinlichkeit p für einen Erfolg (Erfolgswahrscheinlichkeit) und die Wahrscheinlichkeit q $(= 1-p)$ für einen Misserfolg nicht, so spricht man von einem *n-stufigen Bernoulli-Versuch*.

In diesem Sinn ist also das n-malige Ziehen *ohne* Zurücklegen ein n-stufiger Bernoulli-Versuch. Das haben aber die Autoren dieses Buches (die übrigens das Wort *Bernoulli-Kette* vermeiden) nicht gemeint, denn eine Seite später heißt es:

> Gegeben sei ein n-stufiger Bernoulli-Versuch mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p ... . Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X: *Anzahl der Erfolge* heißt **Binomialverteilung**.

Bei obigem zweistufigen Bernoulli-Versuch gilt aber

$$\mathbb{P}(X=2) = P(A_1 \cap A_2) = p(1,1) = \frac{r(r-1)}{(r+s)_2}$$

und damit $\mathbb{P}(X=2) \neq p^2$. Die Anzahl der Treffer besitzt somit keine Binomialverteilung. Letztere würde sich einstellen, wenn die beiden Ereignisse nicht nur gleich wahrscheinlich, sondern dazu noch *stochastisch unabhängig* wären, wenn also $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$ gelten würde.

Zieht man dreimal *mit* Zurücklegen und jeweils gutem Mischen, so ergibt sich mit p wie in (1) und $q = 1-p$ das in Abb. 2 dargestellte Baumdiagramm.

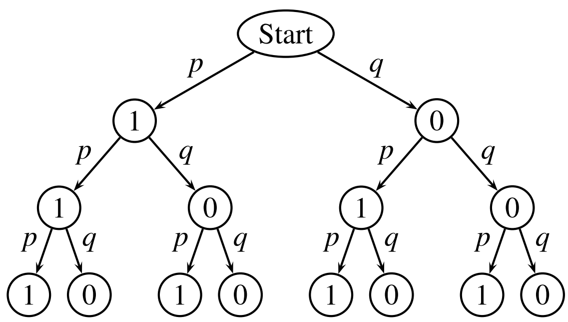

Abb. 2: Ein „langweiliges“ Baumdiagramm

Dieses ist in gewisser Weise langweilig, denn an den von jedem Knoten abgehenden beiden Pfeilen steht immer das Gleiche, und zwar auf jeder Stufe. Außerdem weiß man schon, wie es in den nächsten Stufen weitergeht. Diese Langeweile charakterisiert aber die *stochastische Unabhängigkeit* von Ereignissen, die sich auf unterschiedliche Bernoulli-Versuche beziehen. Ganz egal, auf welchem Wege man zu einem

Knoten im Baumdiagramm gelangt ist: es geht *unabhängig davon* mit der gleichen Wahrscheinlichkeit p für einen Treffer weiter. Um die Wortwahl „Ereignisse, die sich auf unterschiedliche Bernoulli-Versuche beziehen“ zu präzisieren, wählen wir die sich als Ergebnismenge für n Bernoulli-Versuche geradezu aufdrängende Menge

$$\Omega := \big\{(a_1,\ldots,a_n) : a_j \in \{0,1\} \text{ für } j = 1,\ldots,n\big\}$$

aller binären n-Tupel. Für jedes $j \in \{1,\ldots,n\}$ ist dabei $a_j = 1$ bzw. $a_j = 0$ gesetzt, falls der j-te Bernoulli-Versuch einen Treffer bzw. eine Niete ergibt. Als Teilmenge von Ω ist dann

$$A_j := \{(a_1,\ldots,a_n) \in \Omega : a_j = 1\} \qquad (2)$$

das Ereignis, dass im j-ten Versuch ein Treffer auftritt ($j \in \{1,\ldots,n\}$).

Der Nutzen binärer Tupel ist nicht hoch genug einzuschätzen. Wenn man von der Möglichkeit absieht, sogar noch Klammern und Kommata wegzulassen und *binäre n-Wörter* zu verwenden (siehe z.B. Engel (1987), S. 13), so beschreibt das 5-Tupel $(0,1,1,0,1)$ in kompakter Weise die Resultate von fünf Bernoulli-Versuchen, nämlich Niete im ersten Versuch, Treffer im zweiten Versuch usw. Das obige Tupel kann aber auch dafür stehen, dass von fünf Objekten das zweite, dritte und fünfte ausgewählt werden, das erste und vierte aber nicht, siehe z.B. Henze (2022b).

Die Wahl von Ω wie oben und die Definition von $A_1,\ldots,A_n$ haben noch nichts mit Stochastik zu tun, denn bislang ging es nur darum, eine einfache Ergebnismenge für n Versuche mit je zwei möglichen Ausgängen 1 bzw. 0 hinzuschreiben und formal das Ereignis zu definieren, dass im j-ten Versuch ein als 1 codierter *Treffer* auftritt. Setzen wir jedoch *speziell*

$$\mathbb{P}\big(\{(a_1,\ldots,a_n)\}\big) := p^{a_1+\ldots+a_n} q^{n-a_1-\ldots-a_n},$$

so sind die Ereignisse $A_1,\ldots,A_n$ stochastisch unabhängig, und sie besitzen die gleiche Wahrscheinlichkeit p (siehe z.B. Henze u.a. (2021), Abschn. 12.4).

Diese Festlegung ordnet jedem n-Tupel mit genau k Einsen die Wahrscheinlichkeit $p^k q^{n-k}$ zu. Mit den in (2) definierten Ereignissen A_j nimmt die durch

$$X\big((a_1,\ldots,a_n)\big) := a_1 + \ldots + a_n \qquad (3)$$

definierte Zufallsgröße $X : \Omega \to \{0,\ldots,n\}$ genau dann den Wert k an, wenn ein Tupel $(a_1,\ldots,a_n)$ mit genau k Einsen realisiert wird, also insgesamt k Treffer erzielt werden. Da es $\binom{n}{k}$ binäre n-Tupel mit genau k Einsen gibt (siehe Henze (2022b)), folgt die sog. *Formel von Bernoulli*, also

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k \in \{0,\ldots,n\}. \qquad (4)$$

Die Zufallsvariable X hat somit die Binomialverteilung $\mathrm{Bin}(n,p)$.

Die Notierung der Ergebnismenge in Form binärer Tupel besitzt im Vergleich zu der manchmal anzutreffenden Notation E (für Erfolg) und F (für Fehlschlag) auch den großen Vorteil, dass Sie als Lehrkraft der Klasse das Konzept einer Zufallsgröße (synonym: *Zufallsvariable*) als Zuordnung (Abbildung, Funktion) auf der Ergebnismenge Ω deutlich machen können. Dass eine Zufallsvariable eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ist, findet man noch auf S. 73 in Glaser u.a. (1982). Im Zuge der jahrzehntelangen Entfachlichung liest man auf Seite 63 in Bostelmann u.a. (2009) nur noch:

> Spielst Du z. B. Monopoly, dann kommt es auf die Augensumme an, bei anderen Spielen auf den Unterschied der beiden Augenzahlen. Wir nennen die Größe, auf die es uns ankommt, Zufallsvariable.

Beim „CHECK UP“ auf Seite 92 heißt es dann noch einmal zusammenfassend:

> Zufallsvariable X: Die Größe, auf die es uns ankommt (hier der Gewinn).

Anhand der Darstellung (3) erschließt sich jedoch unmittelbar, dass X etwas Konzeptionelles ist, nämlich eine auf der Ergebnismenge Ω definierte Funktion und nicht nur etwas, „was uns interessiert“.

3 Der Spezialfall $n = 3$

In diesem Abschnitt soll der spezielle Fall $n = 3$ anhand einer Situation betrachtet werden, die eine Auseinandersetzung mit den falschen Fährten, die ein Baumdiagramm legen kann, geradezu herausfordert. In Freudigmann u.a. (2016) liest man auf S. 130:

> Definition: Ein Zufallsexperiment heißt **Bernoulli-Experiment**, wenn es genau zwei (mögliche (Anm. des Verfassers)) Ergebnisse hat. Eine **Bernoulli-Kette** besteht aus mehreren voneinander unabhängigen Durchführungen eines Bernoulli-Experiments. Die Anzahl der Durchführungen nennt man die **Länge** n der Bernoulli-Kette. Die **Trefferwahrscheinlichkeit** wird mit p bezeichnet.

In Lergenmüller u.a. (2012) findet sich auf S. 120 der wichtige Satz:

> Die Versuchswiederholungen sind unabhängig, d.h., die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer hängt nicht davon ab, was zuvor geschehen ist.

Wenn aber keinerlei stochastische Abhängigkeiten bestehen, könnte man doch die n Versuche – wenn möglich – zeitgleich stattfinden lassen oder etwa den zweiten vor dem ersten. Ja, das ist richtig, und allein diese Tatsache spricht gegen die Verwendung des Begriffs „Kette", der das Vorliegen von mehr oder weniger starken Abhängigkeiten suggeriert.

Die Tatsache, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer nicht davon abhängt, „was zuvor geschehen ist", zeigt sich im „langweiligen" Baumdiagramm von Abb. 2. Dieses suggeriert, dass sich etwas verzweigen würde, was bei n völlig unabhängig voneinander ablaufenden stochastischen Vorgängen mitnichten der Fall ist.

Konfrontieren Sie Ihre Klasse doch einmal mit der folgenden Situation, nachdem Sie die Binomialverteilung über Pfade und Baumdiagramme kennengelernt haben: Anja, Bettina und Claudia drehen in getrennten Räumen jeweils ein Glücksrad mit den beiden Sektoren S_1 und S_2. Dabei haben S_1 und S_2 die Anteile p bzw. $q := 1 - p$ an der Gesamtfläche. Als *Erfolg* (1) gelte, wenn der Zeiger des Rades im Sektor S_1 landet, ansonsten liegt ein Misserfolg (0) vor. Welche Verteilung besitzt die mit X bezeichnete Gesamtzahl der Erfolge? Konkreter gefragt: Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt X den Wert k an, wobei $k \in \{0,1,2,3\}$ gilt? Können Ihre Schülerinnen und Schüler diese Frage beantworten?

Unüblich an dieser Fragestellung ist offenbar, dass die Würfe in getrennten Räumen stattfinden und auch nicht nacheinander in einer festgelegten Reihenfolge erfolgen müssen und mitgeteilt werden. Man wird aber dadurch geradezu mit der wie immer mathematisch zu präzisierenden *Unabhängigkeit* von Ereignissen konfrontiert. Wir müssen noch (willkürlich!) festlegen, für welches Ergebnis ein binäres Tripel der Gestalt (a_1, a_2, a_3) steht, denn es liegen ja keine hintereinander durchgeführten Versuche vor. Diese Willkürlichkeit deutet eine gewisse „Austauschbarkeit" an. Im Folgenden vereinbaren wir eine Festlegung in alphabetischer Reihenfolge. a_1 steht also für das Ergebnis von Anja, und a_2 bzw. a_3 kennzeichnen die Ergebnisse von Bettina bzw. von Claudia. Das Tripel $(1,0,1)$ bedeutet also, dass Anja und Claudia den Sektor S_1 getroffen haben, und bei Bettina ist der Zeiger des Glücksrades in Sektor S_2 gelandet. Dabei habe uns zuerst Claudia ihr Ergebnis mitgeteilt, danach Anja und dann Bettina.

Ihre Aufgabe als Lehrkraft besteht jetzt darin, deutlich zu machen, dass die Wahrscheinlichkeit für das Tripel $(1,0,1)$ (genauer: für die einelementige Teilmenge $\{(1,0,1)\}$ der Menge Ω aller acht Tripel p^2q beträgt und allgemein für ein Tripel mit k Einsen gleich $p^k q^{3-k}$ ist. Natürlich lässt sich diese Erkenntnis über die Pfadregel in einem Baumdiagramm gewinnen. Was sollte aber ein solches Baumdiagramm strukturieren? Sollten sich die Stufen in der Reihenfolge der Mitteilungen der einzelnen Ergebnisse aufbauen? Ihre Schülerinnen und Schüler dürften schnell erkennen, dass wir dann sechs Baumdiagramme hätten, die aber alle gleich aussehen.

Da es jeweils drei Tripel mit einer Eins und drei mit zwei Einsen gibt und nur jeweils ein Tripel mit drei Einsen bzw. null Einsen existiert, ergibt sich

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{3}{k} p^k q^{3-k}, \quad k \in \{0,1,2,3\}.$$

Es seien A_1, A_2 und A_3 die Ereignisse, dass Anja bzw. Bettina bzw. Claudia Erfolg haben und somit den Sektor S_1 treffen, Diese verbal formulierten Ereignisse stehen für die Teilmengen

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}, \\ A_2 &= \{(0,1,0),(0,1,1),(1,1,0),(1,1,1)\}, \\ A_3 &= \{(0,0,1),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,1)\} \end{aligned}$$

von Ω. Überlegen Sie sich doch einmal zusammen mit Ihren Schülerinnen und Schülern, dass $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = p$ gilt, und dass A_1, A_2 und A_3 stochastisch unabhängig sind. Da in jedem der vier das Ereignis A_1 bildenden Tripel an der ersten Stelle eine Eins steht, können wir bei der Bestimmung von $\mathbb{P}(A_1)$ den Faktor p ausklammern und erhalten

$$\mathbb{P}(A_1) = p\left(q^2 + 2pq + p^2\right) = p\left(p+q\right)^2 = p$$

und völlig analog $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = p$.

Um die stochastische Unabhängigkeit zu zeigen, müssen wir die Gültigkeit der Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) &= \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2), && (5) \\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3), && (6) \\ \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3), && (7) \\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3) && (8) \end{aligned}$$

nachweisen (siehe Henze (2021), S. 118). Wegen $A_1 \cap A_2 = \{(1,1,0),(1,1,1)\}$ folgt $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = p^2(p+q) = p^2 = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2)$ und damit (5). In gleicher Weise ergeben sich (6) und (7). Da das Ereignis $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ nur aus dem Tripel $\{(1,1,1)\}$ besteht, gilt $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p^3$ und somit auch (8). Mit etwas größerem Aufwand kann auf Schulniveau auch noch der Fall $n = 4$ behandelt werden (siehe Henze u.a. (2021), S. 176–178).

Um den Fall $n = 3$ abzuschließen, sei betont, dass – wie fälschlicherweise auf S. 145 in Eichler und Vogel (2011) behauptet – die *paarweise* stochastische Unabhängigkeit von drei gleich wahrscheinlichen Ereignissen nicht ausreicht, um eine Binomialverteilung für die Anzahl der eintretenden Ereignisse zu begründen. Ein einfaches Gegenbeispiel dazu findet sich in Henze u.a. (2021), S. 178–179. Man benötigt wirklich die durch vier Gleichungen beschriebene stochastische Unabhängigkeit dieser Ereignisse.

4 Fazit

Bei einer *Markov-Kette* liegen bestimmte stochastische Abhängigkeiten zwischen Zufallsvariablen vor, die den Wortteil *Kette* rechtfertigen. Im angelsächsischen Raum bzw. in spanischsprachigen Ländern heißt es diesbezüglich *Markov chain* bzw. *cadena de Markov*. Es gibt aber weder eine *Bernoulli chain* noch eine *cadena de Bernoulli*, sondern einen *Bernoulli process* bzw. einen *proceso de Bernoulli*, was merkwürdig, also des Merkens würdig ist. Ich plädiere dafür, das Wort *Bernoulli-Kette* durch *Bernoulli-Prozess* oder *Bernoulli-Folge* zu ersetzen, weil im Zusammenhang mit der Binomialverteilung die stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen, die sich auf verschiedene Bernoulli-Versuche beziehen, charakteristisch ist. Auch Baumdiagramme sind diesbezüglich kritisch zu hinterfragen, weil sie Verzweigungen (und damit auch Abhängigkeiten) suggerieren, die nicht vorhanden sind. Die konsequente Verwendung binärer Tupel vermeidet hier Fehlvorstellungen. Falls möglich sollte auch das Thema stochastische Unabhängigkeit im Zusammenhang mit der Binomialverteilung thematisiert werden.

Danksagung: Ich danke den Gutachter(inne)n sowie Reimund Vehling und Joachim Engel für wertvolle Hinweise.

Literatur

Barth, F., und Haller, R. (1985): Stochastik. Leistungskurs. Ehrenwirth Verlag, München.

Bostelmann, M. u.a. (2009): Mathematik Neue Wege 6. Arbeitsbuch für Gymnasien Baden-Württemberg. Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage.

Eichler, A., und Vogel, M. (2011): Leitfaden Stochastik. Für Studierende und Ausübende des Lehramts. 1. Auflage. Verlag Vieweg+Teubner, Wiesbaden

Engel, A. (1987): Stochastik. Klett Studienbücher. Ernst Klett Verlag, Stuttgart.

Freudigmann, H. u.a. (2016): Lambacher Schweizer 10. Mathematik für Gymnasien Baden–Württemberg. Stuttgart u.a.: Klett.

Freudigmann, H. u.a. (2017): Lambacher Schweizer 8. Mathematik für Gymnasien Baden–Württemberg. Stuttgart u.a.: Klett.

Glaser u.a. (Hrsg.) (1982): Sigma: Grundkurs Stochastik. Ernst Klett Verlag, Stuttgart.

Griesel, H. u.a. (2003): Elemente der Mathematik. Leistungskurs Stochastik mit Orientierungswissen Lineare Algebra/Analytische Geometrie. Schroedel Verlag, Hannover.

Henze, N. (2018): Verständnisorientierter gymnasialer Stochastikunterricht – quo vadis? Stochastik in der Schule 38(3), 12–23.

Henze, N. (2020): Das siebte Los. Erklärvideo. DOI:10.5445/IR/1000126913

Henze, N. (2021): Stochastik für Einsteiger. 13. Auflage. Heidelberg: Springer Spektrum.

Henze, N., Müller, K., und Schilling, J. (2021): Stochastik rezeptfrei unterrichten – Anregungen für spannende Lehre über den Zufall: Heidelberg: Springer Spektrum.

Henze, N. (2022a): Wann gleichen sich Treffer und Nieten erstmals aus? Stochastik in der Schule 42(1), 14–20.

Henze, N. (2022b): Binomialkoeffizienten – verstehen oder rechnen? Stochastik in der Schule 42(3) (erscheint).

Schilling, J., und Krüger, K. (2022): Die Rolle von Baumdiagrammen bei der Bearbeitung stochastischer Probleme. Stochastik in der Schule 42(2), 2–11.

Lergenmüller u.a. (Hrsg.) (2012): Mathematik Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien. Stochastik. Bildungshaus Schulbuchverlage, Braunschweig.

Anschrift des Verfassers:

Prof. i.R. Dr. Norbert Henze
KIT Distinguished Senior Fellow
Institut für Stochastik
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Englerstr. 2
76131 Karlsruhe
Henze@kit.edu