# 1 Lösungen zu Kapitel 1

**1.1 Lösung.** Mögliche Lösungen sind:

$$\begin{aligned}
F_1 =& A \wedge B \wedge C,\\
F_2 =& (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) = A \wedge B,\\
F_3 =& (a \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C).
\end{aligned}$$

Anmerkung: Hierbei handelt es sich um die sogenannten *disjunktiven Normalformen* der jeweiligen Aussagen.

**1.2 Lösung.** (i) Es gibt einen Arbeitnehmer, der keine Lohnsteuer bezahlt, obwohl er monatlich über 300 EURO verdient oder in mehr als einem Arbeitsverhältnis steht.

(ii) Es gibt ein Tier, das keine Beine und keine Flossen hat, oder es gibt eine Pflanze, die keine Wurzeln hat.

(iii) Kein Käfer und kein Schmetterling ist schneller als alle Fische und alle Landtiere.

(iv) Es gibt eine Straße, die nicht nach Rom führt oder alle Pfade führen nicht nach Rom.

**1.3 Lösung.** (i) Die Wahl $B = \emptyset$ zeigt, dass die Aussage falsch ist.

(ii) Die Wahl $A = B = C$ zeigt, dass die Aussage falsch ist.

(iii) Diese Aussage ist für beliebige $A, B, C$ wahr. Nach dem Distributivgesetz (vgl. 1.3.6) gilt nämlich

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Aus $A \cap C \subset A$ folgt die behauptete Inklusion.

(iv) Diese Aussage ist für beliebige $A, B, C, D$ wahr. Zum Beweis wählen wir ein $x$ aus der Menge $(D \setminus A) \cup (D \setminus B) \cup (D \setminus C)$. Damit gilt die Aussage

$$(x \in D \wedge x \notin A) \vee (x \in D \wedge x \notin B) \vee (x \in D \wedge x \notin C).$$

Daraus folgt nacheinander die Gültigkeit der folgenden Aussagen:

$$\begin{aligned}
&x \in D \wedge (x \notin A \vee x \notin B \vee x \notin C),\\
&x \in D \wedge (\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B) \vee \neg(x \in C)),\\
&x \in D \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C),\\
&x \in D \wedge \neg(x \in A \cap B \cap C).
\end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist gleichbedeutend mit $x \in D \setminus (A \cap B \cap C)$. Wählt man umgekehrt ein beliebiges $x \in D \setminus (A \cap B \cap C)$, so gilt die Aussage

$$x \in D \wedge \neg(x \in A \cap B \cap C).$$

Hieraus folgen nacheinander die obigen Aussagen in umgekehrter Reihenfolge und damit $x \in (D \setminus A) \cup (D \setminus B) \cup (D \setminus C)$.

**1.4 Lösung.** (i) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt $A_m \cap A_{m+1} \cap A_{m+2} = \emptyset$. Es ergibt sich

$$\bigcap_{i=m}^{\infty} A_i = \emptyset$$

und damit auch $A = \emptyset$.

(ii) Es gilt

$$B = [0, 3].$$

Zum Beweis sei zunächst $x \in [0, 3]$. Für $x = 0$ ist $x \in A_i$ für jedes ungerade $i$ und damit in $\bigcup\limits_{i=m}^{\infty} A_i$ für jedes $m \in \mathbb{N}$. Für $x \in (0, 3]$ gilt $x \in A_i$ für jedes hinreichend große gerade $i$ und damit erneut $x \in \bigcup\limits_{i=m}^{\infty} A_i$. Also ist $x \in B$. Zum Beweis der Inklusion $B \subset [0, 3]$ überlege man sich, dass weder ein $x < 0$ noch ein $x > 3$ in $B$ sein kann.

**1.5 Lösung.** Es sei $x \in A$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$x \in \bigcap_{i=k}^{\infty} A_i = A_k \cap A_{k+1} \cap A_{k+2} \cap \ldots.$$

Daraus folgt

$$x \in \bigcup_{i=m}^{\infty} A_i$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$ und somit

$$x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \left( \bigcup_{i=m}^{\infty} A_i \right) = B.$$