2 Lösungen zu Kapitel 2

2.1 Lösung. Die Funktion f ist nicht injektiv. So gibt es (unendlich) viele Paare (x, y) mit $f(x, y) = 0$, etwa $(0, 0)$ und $(1/2, 1)$. Die Funktion f ist surjektiv. Zum Beispiel gilt

$$\{f(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

2.2 Lösung. Da 0 von der Funktion f nicht als Wert angenommen wird, kann die Komposition $g \circ f$ gebildet werden. Wegen

$$g\Big(-\frac{3}{8}\Big) = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3} \notin \mathbb{R} \setminus \{4/3\}$$

kann die Komposition $f \circ g$ nicht gebildet werden.

Für die Komposition $g \circ f : \mathbb{R} \setminus \{3/4\} \to \mathbb{R}$ gilt

$$g \circ f(x) = \frac{1}{1/(3x-4)} + 4 = 3x.$$

Also ist $g \circ f$ injektiv. Die Funktion ist aber nicht surjektiv. Die Zahl $9/4$ wird von $g \circ f$ nicht angenommen.

2.3 Lösung. Die erste Aussage ist wahr. Aus der Injektivität von f und g folgt nämlich die Injektivität von $g \circ f$: Aus $x_1 \neq x_2$ ergibt sich $f(x_1) \neq f(x_2)$ und damit $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$. Analog folgt, dass die Surjektivität von f und g die Surjektivität von $g \circ f$ impliziert. Ist nämlich $z \in Z$ beliebig, so existiert wegen der Surjektivität von g ein $y \in Y$ mit $g(y) = z$. Da f surjektiv ist, gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Insgesamt folgt $g \circ f(x) = z$, was zeigt, dass $g \circ f$ surjektiv ist.

Wie das Beispiel $X := Z := \{1\}$, $Y := \{1, 2\}$, $f(1) := 1$, $g(1) := 1$, $g(2) := 1$ zeigt, ist die zweite Ausage falsch.

2.4 Lösung. (i) Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \mid x+3 \mid + \frac{2x+7+ \mid 2x+7 \mid}{4x+14} \\ &= \begin{cases} 2(x+3)+1 = 2x+7, & \text{für } x \geq -3, \\ -2(x+3) = -2x-6, & \text{für } x < -3. \end{cases} \end{aligned}$$

Damit ist $\{f(x) : x \geq -3\}$ die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen und $\{f(x) : x < -3\}$ die Menge der geraden natürlichen Zahlen. Außerdem erkennt man die Injektivität von f.

(ii) Zur Bestimmung der Umkehrfunktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ von f hat man die Gleichungen $y = 2x + 7$ und $y = -2x - 6$ für ungerades bzw. gerades y nach x aufzulösen. Es ergibt sich

$$g(y) = \begin{cases} \frac{y-7}{2}, & \text{für ungerades } y, \\ -\frac{y}{2} - 3, & \text{für gerades } y. \end{cases}$$

2.5 Lösung. Zunächst soll die Injektivität von f nachgewiesen werden. Es seien hierzu $x, x' \in \mathbb{R}$ mit $x \neq x'$. Gilt $x, x' \geq 1$ oder $x, x' < 1$, so folgt offenbar $f(x) \neq f(x')$. Im Fall $x \geq 1$ und $x' < 1$ (der Fall $x < 1$ und $x' \geq 1$ folgt analog) gilt

$$(x-1)^2 = f(x) \geq 0 > f(x') = \frac{1}{x'-1},$$

also insbesondere $f(x) \neq f(x')$.

Die Abbildung f ist auch surjektiv. Zum Nachweis sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Im Fall $y \geq 0$ setzt man $x := 1+\sqrt{y}$ und erhält $f(x) = y$. (Hier wie auch an anderen Stellen der ersten beiden Kapitel werden aus der Schule bekannte Eigenschaften reeller Zahlen und stetiger Funktionen benutzt, die formal erst in den Kapiteln 3 und 5 diskutiert werden.) Im Fall $y < 0$ setzt man $x := 1 + \frac{1}{y}$ und erhält $f(x) = y$. Somit ist f bijektiv mit der Umkehrabbildung

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \begin{cases} 1+\sqrt{y}, & y \geq 0, \\ 1 + \frac{1}{y}, & y < 0. \end{cases}$$

2.6 Lösung.

(i) f_1 ist injektiv, aber wegen $3 \notin f(\mathbb{N})$ nicht surjektiv und somit auch nicht bijektiv. Der Wertebereich von f_1 ist die Menge $\{1, 4, 9, 16, \ldots\}$ aller Quadratzahlen.

(ii) Wegen $f_2(-1) = f_2(1) = 1$ ist f_2 nicht injektiv und somit auch nicht bijektiv. Es gilt $f_2(\mathbb{R}) = [0, \infty)$ (zu jedem $y \geq 0$ existiert ein $x \geq 0$ mit $x^2 = y$), und folglich ist f_2 surjektiv.

(iii) Die Funktion f_3 ist injektiv: Aus $x, x' \in (-\infty, 3)$ mit $x \neq x'$ folgt

$$\frac{1}{x-3} \neq \frac{1}{x'-3}.$$

Die Funktion f_3 ist nicht surjektiv, denn aus $x \in (-\infty, 3)$ folgt $x - 3 < 0$ und somit $f(x) = 1/(x-3) < 0$. Also gibt es etwa zu $y = 1$ kein $x \in (-\infty, 3)$ mit $f(x) = y$. Insgesamt ergibt sich, dass f_3 nicht bijektiv ist.

(iv) Es gilt $f_4(x) = 4 - (x-2)^2$ für $x < 1$ und $f_4(x) = (x-1)^2 + 3$ für $x \geq 1$. Hieraus folgt leicht die Injektivität von f_4: Sind $x, x' \in \mathbb{R}$ mit $x \neq x'$, so gilt offenbar $f_4(x) \neq f_4(x')$ in den Fällen $x, x' \geq 1$ und $x, x' < 1$. Im verbleibenden Fall $x' < 1, x \geq 1$ (der Fall $x' \geq 1, x < 1$ folgt analog) gilt $f_4(x') < 3$ und $f_4(x) \geq 3$, also insbesondere $f_4(x) \neq f_4(x')$. Die Funktion f_4 ist auch surjektiv (und damit insgesamt bijektiv): Ist nämlich $y \in \mathbb{R}$ beliebig, so unterscheidet man die Fälle $y \geq 3$ und $y < 3$. Im Fall $y \geq 3$ setzt man $x := 1 + \sqrt{y-3}$ und erhält (wegen $x \geq 1$)

$$f_4(x) = (1 + \sqrt{y-3} - 1)^2 + 3 = y.$$

Gilt $y < 3$, so setzt man $x := 2 - \sqrt{4-y}$ und erhält (wegen $x < 1$)

$$f_4(x) = 4 - (2 - \sqrt{4-y} - 2)^2 = y.$$

Die Umkehrfunktion $f_4^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu f_4 lautet

$$f_4(y) := \begin{cases} 1 + \sqrt{y-3}, & \text{falls } y \geq 3, \\ 2 - \sqrt{4-y}, & \text{falls } y < 3. \end{cases}$$

2.7 Lösung. (i) Die Relation

$$R_1 := \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$$

ist reflexiv und symmetrisch, aber nicht antisymmetrisch.

Die Relation

$$R_2 := \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2)\}$$

ist reflexiv und antisymmetrisch, aber nicht symmetrisch.

Die Relation

$$R_3 := \{(1,1),(2,2)\}$$

ist symmetrisch und antisymmetrisch, aber nicht reflexiv.

(ii) Wegen der Symmetrie und Antisymmetrie von R kann es kein Paar $(x,y) \in R$ mit $x \neq y$ geben. Da R reflexiv ist, gilt dann $R = \{(x,x) : x \in \mathbb{N}\}$. Die Relation R ist damit transitiv. Die gestellte Frage ist also mit Nein zu beantworten.

(iii) Nein. Aus der Definition der Vollständigkeit folgt, dass für jedes $x \in M$ die Beziehung $(x,x) \in R$ erfüllt ist.

2.8 Lösung. Die Relation R_1 ist nicht transitiv und damit keine Äquivalenzrelation, denn es gilt $(0,2) \in R_1$ sowie $(2,4) \in R_1$ aber $(0,4) \notin R_1$. Die Relation R_2 ist reflexiv, symmetrisch und transitiv und somit eine Äquivalenzrelation .

2.9 Lösung. Eine Präferenzrelation ist nach Definition reflexiv, transitiv und vollständig.

(i) Wegen der geforderten Reflexivität muss R_1^* die Paare $(j,j), 1 \leq j \leq 5$, enthalten. Um die Transitivität zu gewährleisten, müssen die Beziehungen

$$(1,3) \in R,\ (2,4) \in R,\ (3,5) \in R,\ (1,5) \in R,\ (1,4) \in R,\ (2,5) \in R$$

gelten. Dann ist

$$R_1^* := \{(i,j) \in X \times X : i \leq j\}$$

eine Präferenzrelation, und zwar die kleinste Präferenzrelation, die R_1 enthält. Sie ist nach Konstruktion („zwangsweise Hinzunahme von Paaren“) eindeutig bestimmt. Da R_1^* antisymmetrisch ist, ist R_1^* eine Totalordnung.

(ii) Wegen der geforderten Reflexivität muss R_2 zunächst um die Paare (j, j), $1 \leq j \leq 5$, erweitert werden. Die Eigenschaft der Transitivität erfordert zwingend die Hinzunahme der Paare $(5, 2), (5, 3)$. Die Relation

$$\tilde{R}_2 := R_2 \cup \{(j, j) : 1 \leq j \leq 5\} \cup \{(5, 2), (5, 3)\}$$

ist reflexiv und transitiv, aber nicht vollständig, da etwa weder $(1, 4)$ noch $(4, 1)$ zu $\tilde{R}_2$ gehören. Die Relation

$$R_2^* := \tilde{R}_2 \cup \{(4, 1), (4, 2)\}$$

ist eine (kleinstmögliche) Präferenzrelation, die R_2 enthält. Andererseits ist auch

$$R_2' := \tilde{R}_2 \cup \{(1, 4), (2, 4)\}$$

eine (kleinstmögliche) Präferenzrelation, die R_2 enthält. Sowohl R_2^* als auch R_2' sind Totalordnungen, da sie antisymmetrisch sind.

2.10 Lösung. (i) Die Relation R ist reflexiv, denn es gilt $(z_1, z_2)R(z_1, z_2)$ für jede Wahl von $(z_1, z_2) \in X$. Wegen

$$(z_1', z_2')R(z_1, z_2) \iff z_1' z_2 = z_1 z_2' \iff (z_1, z_2)R(z_1', z_2')$$

für jede Wahl von $(z_1, z_2) \in X$ und $(z_1', z_2') \in X$ ist R auch symmetrisch. Jetzt wird geprüft, ob R transitiv ist. Dazu seien $(z_1, z_2), (z_1', z_2'), (z_1'', z_2'') \in X$ mit

$$(z_1, z_2)R(z_1', z_2') \quad \text{und} \quad (z_1', z_2')R(z_1'', z_2'').$$

Gleichbedeutend hiermit ist

$$z_1 z_2' = z_1' z_2 \quad \text{und} \quad z_1' z_2'' = z_1'' z_2'.$$

Wegen $z_2' \neq 0$ folgt

$$\begin{aligned} z_1 z_2'' &= z_1 z_2' \cdot \frac{1}{z_2'} \cdot z_2'' \\ &= z_1' z_2 \cdot \frac{1}{z_2'} z_2'' \\ &= z_1' z_2'' \cdot z_2 \frac{1}{z_2'} \\ &= z_1'' z_2' \cdot z_2 \cdot \frac{1}{z_2'} \\ &= z_2 z_1'' \end{aligned}$$

und damit $(z_1, z_2)R(z_1'', z_2'')$. Somit ist die Relation R transitiv, also insgesamt eine Äquivalenzrelation.

(ii) Es gilt $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ (vgl. 1.3.2). Somit gilt $\varphi(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) = \mathbb{Q}$ und damit erst recht $\varphi(X) = \mathbb{Q}$. Die Abbildung φ ist somit surjektiv. Wegen $\varphi(-1,-1) = \varphi(1,1) = 1$ ist φ nicht injektiv.

(iii) Es sei $\tilde{X} := \{[(z_1, z_2)] : (z_1, z_2) \in X\}$ die Menge der Äquivalenzklassen, wobei

$$[(z_1, z_2)] := \{(z_1', z_2') \in X : (z_1, z_2)R(z_1', z_2')\}, \qquad (z_1, z_2) \in X.$$

Weiter sei $\tilde{\varphi} : \tilde{X} \to \mathbb{Q}$ definiert durch

$$\tilde{\varphi}([(z_1, z_2)] := \frac{z_1}{z_2}, \qquad [(z_1, z_2)] \in \tilde{X}.$$

Die Abbildung $\tilde{\varphi}$ ist wohldefiniert, denn aus $[(z_1, z_2)] = [(u_1, u_2)]$ für $(z_1, z_2) \in X, (u_1, u_2) \in X$ folgt $z_1 u_2 = u_1 z_2$ und somit

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{u_1}{u_2}.$$

Die Abbildung $\tilde{\varphi}$ ist surjektiv, denn für beliebiges $y := \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{Q}$ mit $z_1 \in \mathbb{Z}$ und $z_2 \in \mathbb{N}$ gilt $\tilde{\varphi}([(z_1, z_2)]) = y$. Es seien jetzt $(z_1, z_2), (u_1, u_2) \in X$ mit $[(z_1, z_2)] \neq [(u_1, u_2)]$. Hieraus folgt $z_1 u_2 \neq u_1 z_2$ und somit

$$\tilde{\varphi}([(z_1, z_2)]) = \frac{z_1}{z_2} = \tilde{\varphi}([(z_1, z_2)]) \neq \tilde{\varphi}([(u_1, u_2)]) = \frac{u_1}{u_2}\tilde{\varphi}([(u_1, u_2)]).$$

Die Abbildung $\tilde{\varphi}$ ist somit injektiv.