3 Lösungen zu Kapitel 3

3.1 Lösung. Der Induktionsanfang $n = 2$ folgt aus der Ungleichungskette

$$1 - a_1 - a_2 < 1 - a_1 - a_2 + a_1 a_2 = (1 - a_1) \cdot (1 - a_2).$$

Für den Induktionsschluss von n auf $n+1$ seien $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} \in \mathbb{R}$ mit $0 < a_i < 1$ für $i = 1, \ldots, n+1$, und es gelte (Induktionsvoraussetzung)

$$1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_n < (1 - a_1)(1 - a_2) \cdot \ldots \cdot (1 - a_n).$$

Wegen $(1 - a_1)(1 - a_2) \cdot \ldots \cdot (1 - a_n) > 0$ folgt hieraus

$$\begin{aligned} 1 - a_1 - \ldots - a_n - a_{n+1} &< (1 - a_1)(1 - a_2) \cdot \ldots \cdot (1 - a_n) - a_{n+1} \\ &< (1 - a_1)(1 - a_2) \cdot \ldots \cdot (1 - a_n) \\ &\quad - a_{n+1}(1 - a_1)(1 - a_2) \cdot \ldots \cdot (1 - a_n) \\ &= (1 - a_1)(1 - a_2) \ldots (1 - a_n)(1 - a_{n+1}), \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

3.2 Lösung. (i) Aus der Aussage A_k folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{j^2} &= \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \\ &\le c - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \\ &\le c - \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

(die letzte Ungleichung ist zu $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{k+1}$ äquivalent!) und damit A_{k+1}.

(ii) Da die geforderte Ungleichung

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j^2} \le c - \frac{1}{k}$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$ gelten soll, muss sie insbesondere für $k = 1$ gelten, was $c \geq 2$ impliziert. Aus Teil (i) folgt nun sofort, dass obige Ungleichung für jedes $k \geq 1$ gilt. Also muss c mindestens gleich 2 sein.

3.3 Lösung. Der Ansatz $a_n = 1 + n + n^2$, $n \in \mathbb{N}$, erfüllt die geforderten Anfangsbedingungen $a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 7$. Ist $n \geq 3$ und gilt $a_k = 1 + k + k^2$,

$k = 1, 2, \ldots, n$ (Induktionsvoraussetzung), so folgt mit Hilfe der Rekursionsformel

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2} \\ &= 3 \cdot (1 + n + n^2) - 3(1 + n - 1 + (n-1)^2) + 1 + n - 2 + (n-2)^2 \\ &= 1 + (n+1) + (n+1)^2, \end{aligned}$$

womit der Induktionsschluss erbracht ist.

3.4 Lösung. Da für jedes $m \in \mathbb{Z}$ die Zahl $2 \cdot m^3$ gerade und für jedes $n \in \mathbb{Z}$ die Zahl $(2n+1)^2 = 2 \cdot (2n^2 + 2n) + 1$ ungerade ist, ist die Gleichung $(2n+1)^2 = 2m^3$ für jede Wahl von $m, n \in \mathbb{Z}$ falsch.

3.5 Lösung. Es sei A_n die (falsche) Aussage

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{3n+1}{2n+1}.$$

Aus $A_n$folgt A_{n+1}, denn es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} &= \frac{3n+1}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{3(n+1)+1}{2(n+1)+1}. \end{aligned}$$

3.6 Lösung. Die Gleichung $a_n = n(n+1)^2$ erfüllt die Anfangsbedingung $a_1 = 4$; sie gilt also für $n = 1$ (Induktionsanfang). Mit Hilfe der angegebenen Rekursionsformel ergibt sich der Induktionsschluss von n auf $n+1$ aus

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + (n+1)(3n+4) \\ &= n(n+1)^2 + (n+1)(3n+4) \\ &= (n+1)(n(n+1) + 3n + 4) \\ &= (n+1) \cdot (n+2)^2. \end{aligned}$$

3.7 Lösung. Die Gleichung $b_n = 2n^2$ erfüllt die Anfangsbedingungen $b_1 = 2$ und $b_2 = 8$. Gilt die Gleichung $b_k = 2k^2$ für $k = 1, 2, \ldots, n$ (Induktionsanfang), so gilt sie auch für $n+1$ (Induktionsschluss), denn die angegebene Rekursionsformel liefert

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 2b_n - b_{n-1} + 4 \\ &= 2 \cdot 2n^2 - 2(n-1)^2 + 4 \\ &= 2(n+1)^2. \end{aligned}$$

3.8 Lösung. (i) Für $k \in \mathbb{N}$ sei A_k die folgende Aussage: für alle Mengen M und N mit $\operatorname{card} M = \operatorname{card} N = k$ und jede Funktion $f : M \to N$ gilt die Implikation

$$f \text{ injektiv } \Longrightarrow f \text{ surjektiv}.$$

Mit vollständiger Induktion kann die Gültigkeit von A_k für jedes $k \in \mathbb{N}$ bewiesen werden. Hierzu sei zunächst $k = 1$, und es seien M und N Mengen mit $\operatorname{card} M = \operatorname{card} N = 1$. Dann gibt es nur eine Funktion $f : M \to N$. Diese Funktion ist bijektiv. Für $k \in \mathbb{N}$ sei jetzt die Gültigkeit von A_k vorausgesetzt (Induktionsvoraussetzung). Es seien M und N Mengen mit

$$\operatorname{card} M = \operatorname{card} N = k + 1.$$

Ferner sei $f : M \to N$ eine beliebige injektive Funktion. Zu beweisen ist, dass f surjektiv ist. Dazu seien x_0 ein beliebiges Element von M und $y_0 := f(x_0)$. Für die Mengen

$$M' := M \setminus \{x_0\}, \quad N' := N \setminus \{y_0\}$$

gilt dann

$$\operatorname{card} M' = \operatorname{card} N' = k.$$

Die durch $f'(x) := f(x)$, $x \in M'$, definierte Funktion $f' : M' \to N'$ ist ebenfalls injektiv. Nach Induktionsvoraussetzung ist f' surjektiv, d.h.

$$\{f(x) : x \in M \setminus \{x_0\}\} = N \setminus \{y_0\}.$$

Dann folgt

$$\{f(x) : x \in M\} = (N \setminus \{y_0\}) \cup \{y_0\} \setminus N.$$

(ii) In Abwandlung von (i) sei A_k die Aussage, dass für alle Mengen M und N mit $\operatorname{card} M = k = \operatorname{card} N$ und jede Funktion $f : M \to N$ die Implikation

$$f \text{ surjektiv } \Longrightarrow f \text{ injektiv}$$

richtig ist. Die Aussage, dass A_k für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt, wird wie in (i) durch vollständige Induktion bewiesen. Dabei erfolgt der Nachweis des Induktionsanfangs $k = 1$ wie in (i). Für $k \in \mathbb{N}$ sei jetzt die Gültigkeit von A_k vorausgesetzt. Zum Nachweis des Induktionsschlusses $k \to k + 1$ seien M und N Mengen mit $\operatorname{card} M = \operatorname{card} N = k+1$ sowie $f : M \to N$ eine beliebige surjektive Funktion. Zu zeigen ist, dass f injektiv ist. Dazu seien x_0 ein beliebiges Element aus M sowie $y_0 := f(x_0)$. Bildet man die Mengen M' und N' wie in (i), so ist die durch $f'(x) := f(x)$, $x \in M'$, definierte Funktion $f' : M' \to N'$, ebenfalls surjektiv (diese Abbildung ist wohldefiniert, da für jedes $x \in M'$ die Aussage $f(x) \neq f(x_0)$ gelten muss, denn andernfalls wäre f nicht surjektiv). Nach Induktionsvoraussetzung ist f' injektiv. Damit ist aber auch die Abbildung f injektiv.

(iii) Die durch $f(n) := n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, definierte Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist injektiv, aber nicht surjektiv. Die durch

$$f(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ \frac{n}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \end{cases}$$

definierte Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.

3.9 Lösung. (i) Sind allgemein $A, B \subset M$ mit $A \subset B$, so gilt $f(A) \subset f(B)$. Nach Voraussetzung gilt $f(M) \subset M$ und somit (setze $A := f(M)$ und $B := M$) $f^2(M) \subset f(M)$. Hieraus folgt induktiv $f^{n+1}(M) \subset f^n(M)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Setzt man kurz $k := |M| = \operatorname{card} M \in \mathbb{N}$, so würde die Annahme $f^{n+1}(M) \neq f^n(M)$ für jedes $n = 1, \ldots, k$ zur Ungleichungskette

$$\left|f^{k+1}(M)\right| < \left|f^k(M)\right| < \ldots < \left|f^2(M)\right| < \left|f(M)\right| \leq |M| = k$$

und somit zu $\left|f^{k+1}(M)\right| \leq |M| - k = 0$ führen. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme $M \neq \emptyset$, aus der natürlich $\left|f^n(M)\right| \geq 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgt. Somit existiert ein $n \in \{1, \ldots, k\}$ mit $f^{n+1}(M) = f^n(M)$.

(ii) Wegen $f(N) = f(f^n(M)) = f^{n+1}(M) = f^n(M) = N$ ist f surjektiv. Nach Aufgabe 3.8 (ii) ist f dann auch bijektiv.

(iii) Es ist

$$f^2(\{1,2,3\}) = f(f(\{1,2,3\})) = f(\{2,3\}) = \{2,3\} = f(\{1,2,3\}).$$

Somit ist $n = 1, N = \{2,3\}$ und $g : N \to N$ gegeben durch

$$g(2) = 3, \quad g(3) = 2.$$