4 Lösungen zu Kapitel 4

4.1 Lösung. $\Omega = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$

4.2 Lösung. (i) $\Omega = \{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6) : a_j \in \{1,2,\ldots,49\}$ für $j = 1,\ldots,6$; $1 \le a_1 < a_2 < \ldots < a_6 \le 49\}$

(ii) $\Omega = \{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,z) : a_j \in \{1,2,\ldots,49\}$ für $j = 1,\ldots,6$; $z \in \{1,\ldots,49\}$, $1 \le a_1 < a_2 < \ldots < a_6 \le 49; z \notin \{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}\}$

4.3 Lösung. (i) $A \cap B^c \cap C^c$

(ii) $A \cap B \cap C^c \ \cup \ A \cap B^c \cap C \ \cup \ A^c \cap B \cap C$

(iii) $A \cap B^c \cap C^c \ \cup \ A^c \cap B \cap C^c \ \cup \ A^c \cap B^c \cap C \ \cup \ A^c \cap B^c \cap C^c$

4.4 Lösung. (i) $A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_n^c$

(ii) $A_1 \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_n^c \cup A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap \ldots \cap A_n^c \cup \ldots \cup A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_{n-1}^c \cap A_n$

(iii) $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n^c \cup A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}^c \cap A_n \cup \ldots \cup A_1^c \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$

4.5 Lösung. (i) Im Fall $\omega \in A$ gilt $0 = \mathbf{1}_{A^c}(\omega) = \mathbf{1}_\Omega(\omega) - \mathbf{1}_A(\omega) (= 1-1)$. Falls $\omega \in A^c$, so folgt $1 = \mathbf{1}_{A^c}(\omega) = \mathbf{1}_\Omega(\omega) - \mathbf{1}_A(\Omega) (= 1-0)$.

(ii) Wir unterscheiden die Fälle a) $\omega \in A \cap B$, b) $\omega \in A \cap B^c$, c) $\omega \in A^c \cap B$ und d) $\omega \in A^c \cap B^c$. In den Fällen a) bzw. d) nehmen alle vier Indikatoren den Wert 1 bzw. den Wert 0 an. Im Fall b) gilt $\mathbf{1}_{A \cup B}(\omega) = 1 = \mathbf{1}_A(\omega)$, $\mathbf{1}_B(\omega) = 0 = \mathbf{1}_{A \cap B}(\omega)$, was ebenfalls die Behauptung liefert. Der Fall c) folgt aus b) durch Vertauschen der Rollen von A und B.

(iii) Falls $A \subset B$ und $\omega \in A$ (im Fall $\omega \notin A$ gilt trivialerweise $0 = \mathbf{1}_A(\omega) \le \mathbf{1}_B(\omega)$), so folgt $\omega \in B$, also $\mathbf{1}_A(\omega) = \mathbf{1}_B(\omega)$. Gilt umgekehrt $\mathbf{1}_A \le \mathbf{1}_B$, und wählen wir ein beliebiges $\omega \in A$, so folgt $1 = \mathbf{1}_A(\omega) \le \mathbf{1}_B(\omega)$, also $\mathbf{1}_B(\omega) = 1$ und somit $\omega \in B$, was $A \subset B$ zur Folge hat.

4.6 Lösung. Es sei $\Omega := \{0,1\}^{2n}$, $A_j := \{(a_1,\ldots,a_{2n}) \in \Omega : a_j = 1\}$ $(j = 1,\ldots,2n)$, $X := \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{A_j}$ und $Y := \sum_{j=n+1}^{2n} \mathbf{1}_{A_j}$. Damit ergibt sich:

(i) $\{X \ge 1\}$,

(ii) $\{X = Y\}$,

(iii) $\{X < Y\}$,

(iv) $\{X < n\} \cap \{Y < n\}$.

4.7 Lösung. Die Werte ergeben sich zu

$$(X_1 - X_2)(\Omega) = \{-5, -4, \dots, -1, 0, 1, \dots, 4, 5\}$$
$$(X_1 \cdot X_2)(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$$
$$(X_1 - 2 \cdot X_2)(\Omega) = \{k : k \in \mathbb{Z}, -11 \le k \le 4\}$$

4.8 Lösung. Eine mögliche Wahl ist

$$\begin{aligned}\Omega :=& \{6\} \cup \{(j, 6) : j = 1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{(i, j, 6) : i, j \in \{1, \dots, 5\}\}\\ &\cup \{(i, j, k) : i, j, k \in \{1, \dots, 5\}\}\end{aligned}$$

mit $X(6) := 100$, $X(j, 6) := 50$, $X(i, j, 6) := 10$ und $X(i, j, k) := -30$ für $i, j, k \in \{1, \dots, 5\}$.

4.9 Lösung. 246 aller 520 Männer (ca. 47.3 %) sind höchstens 39 Jahre alt.

4.10 Lösung. Es sei allgemein $\mathbb{P}(A) \ge 1 - a$, $\mathbb{P}(B) \ge 1 - b$, wobei $0 \le a,\ b \le 1$ und $a + b \le 1$. Wegen $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$ (Additionsgesetz 4.2.3(vi)) und $\mathbb{P}(A \cup B) \le 1$ folgt

$$\mathbb{P}(A \cap B) \ge 1 - a + 1 - b - 1 = 1 - (a + b).$$

4.11 Lösung. Es sei $D := B \cup C$ gesetzt. Nach 4.2.3 (vi) gilt

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A \cup D) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D) - \mathbb{P}(A \cap D).$$

Wiederum nach 4.2.3 (vi) gilt $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C)$. Schließlich gilt ebenfalls nach 4.2.3 (vi)

$$\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C)) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

Einsetzen in die rechte Seite der ersten Gleichungskette liefert die Behauptung.

4.12 Lösung. Die Wahrscheinlichkeit beträgt $a/(a + b)$.

4.13 Lösung. Es ist

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{216}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$.

4.14 Lösung. (i) die Behauptung folgt aus

$$\Omega = A \cup A^c \cap B^c \cup A^c \cap B$$

und 4.2.3 (ii).

(ii) Es gilt

$$\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

sowie $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B^c) = 1 - \mathbb{P}(B)$. Hieraus folgt die Behauptung.

4.15 Lösung. Sei $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ und $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/n$, $\omega \in \Omega$. Mit $A = \{1, \ldots, k\}$ und $B = \{2, \ldots, k+1\}$ ($k + 1 \leq n$) gilt

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = k/n$$

sowie

$$\mathbb{P}(A \cap B) = (k-1)/n,$$

also $\mathbb{P}(A \cap B) = c \cdot \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ für $c = n(k-1)/k^2$. Mit $k = 10$ und $n = 10\,000$ gilt $c = 900$.

4.16 Lösung. Durch gedankliche Unterscheidung der Münzen (z.B. durch Färbung) ergibt sich die richtige Wahrscheinlichkeit zu $1/2$, denn von vier gleichwahrscheinlichen Fällen treffen zwei zu.

4.17 Lösung. Die Verteilung der Augensumme X beim dreifachen Wurf mit einem echten Würfel ist durch

k	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{216}$	$\frac{3}{216}$	$\frac{6}{216}$	$\frac{10}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{21}{216}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{27}{216}$

und $\mathbb{P}(X = j) = \mathbb{P}(X = 21 - j)$ für $j = 11, 12, \ldots, 18$ gegeben.

4.18 Lösung. Es ist $\mathbb{P}(A_j) = (j-1)/n$. Mit (4.16), (4.17) folgt

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{j=2}^{n} \mathbf{1}\{A_j\}\Big) = n^{-1} \cdot \sum_{j=2}^{n} (j-1) = n^{-1} \cdot (n-1) \cdot n/2 = (n-1)/2.$$

4.19 Lösung. Es ist $\mathbb{E}(Y_n) \leq 6$ und $\mathbb{E}(Y_n) \geq 6 \cdot \mathbb{P}(Y_n = 6)$. Mit

$$\mathbb{P}(Y_n = 6) = 1 - \mathbb{P}(Y_n \leq 5) = 1 - (5/6)^n$$

folgt die Behauptung.

4.20 Lösung. Ein mögliches Modell ist

$$\Omega := \{(a_1, a_2, a_3, a_4) : a_j \in \{0, 1\} \text{ für } j = 1, 2, 3, 4\}$$

mit $a_j = 1\ (0)$, falls im j–ten Wurf Wappen (Zahl) erscheint, sowie (aus Symmetriegründen) $\mathbb{P} :=$ Gleichverteilung auf Ω. Für $\omega = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \Omega$ ist der

Spielgewinn durch $X(\omega) := 16 \quad (= 20 - 4)$, falls $\omega = (1,1,1,1)$, $\quad X(\omega) := 6$ $(= 10 - 4)$, falls $\sum_{j=1}^{4} a_j = 3$ und $X(\omega) := -4$ sonst, gegeben. Wegen

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 16 \cdot \mathbb{P}(X = 16) + 6 \cdot \mathbb{P}(X = 6) - 4 \cdot \mathbb{P}(X = 4) \\ &= 16 \cdot \frac{1}{16} + 6 \cdot \frac{4}{16} - 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{16} - \frac{4}{16}\right) \;=\; -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

sollte man dieses Spiel möglichst nicht einen ganzen Abend lang spielen.

4.21 Lösung. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{5}{5} + \binom{5}{1} \cdot \binom{5}{4} + \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{3}}{\binom{10}{5}} = \frac{1 + 25 + 100}{252} = \frac{1}{2}.$$

Dieses Ergebnis ist auch aus Symmetriegründen (Gleichberechtigung!) einzusehen.

4.22 Lösung. (i) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt

$$\binom{10}{2}\binom{40}{8}\Big/\binom{50}{10} = 0.3368\ldots.$$

(ii) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt

$$1 - \binom{10}{0}\binom{40}{10}\Big/\binom{50}{10} - \binom{10}{1}\binom{40}{9}\Big/\binom{50}{10} = 0.6512\ldots.$$

4.23 Lösung. Aus

$$\mathbb{V}(Y_n) = (6 - \mathbb{E}Y_n)^2 \mathbb{P}(Y_n = 6) + \sum_{j=1}^{5} (j - \mathbb{E}Y_n)^2 \mathbb{P}(Y_n = j)$$

und $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}Y_n = 6$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n = j) = 0 \quad (j = 1, \ldots, 5$, vgl. Lösung 4.19) folgt die Behauptung.

4.24 Lösung. Ja. Es sei $\mathbb{P}(X = 0) := 1 - p$, $\mathbb{P}(X = n) := p \quad (n \in \mathbb{N}, 0 < p < 1)$. Dann gilt $\mathbb{E}X = np$ und $\mathbb{V}(X) = n^2 p(1-p)$, also $\mathbb{E}X = n^{-1/2}$, $\; \mathbb{V}(X) = n^{1/2} - 1/n$ für $p = n^{-3/2}$. Wählen Sie z.B. $n = 10^6 + 1$.

4.25 Lösung. Die Wahrscheinlichkeit beträgt $1/3$, denn jede der sechs Kugeln hat die gleiche Chance, nach Entnahme zweier Kugeln gezogen zu werden.

4.26 Lösung. Wir wählen $\Omega = \{r, s\}^3$, wobei ein r (bzw. s) in der j–ten Komponente angibt, ob die j–te gezogene Kugel rot (bzw. schwarz) ist. Aufgrund der

Beschreibung des Experimentes sind die Startverteilung und die Übergangswahrscheinlichkeiten durch $p_1(r) = 2/5,\ p_1(s) = 3/5,\ p_2(r|r) = 1/5,\ p_2(s|r) = 4/5,\ p_2(r|s) = 3/5,\ p_2(s|s) = 2/5,\ p_3(r|r,r) = 0,\ p_3(s|r,r) = 1,\ p_3(r|r,s) = p_3(r|s,r) = 2/5,\ p_3(s|r,s) = p_3(s|s,r) = 3/5,\ p_3(r|s,s) = 4/5,\ p_3(s|s,s) = 1/5$ gegeben. Der Ansatz (4.50) liefert

$$\begin{aligned} p(r,r,r) &= 2/5 \cdot 1/5 \cdot 0 = 0, \\ p(r,s,r) &= 2/5 \cdot 4/5 \cdot 2/5 = 16/125, \\ p(s,r,r) &= 3/5 \cdot 3/5 \cdot 2/5 = 18/125, \\ p(s,s,r) &= 3/5 \cdot 2/5 \cdot 4/5 = 24/125 \end{aligned}$$

und somit nach Summation den Wert 58/125 = 0.464 für die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

4.27 Lösung. Legen wir w weiße Kugeln und insgesamt c Kugeln in Schachtel 1, so ist $p(w,c) = (w/c + (100-w)/(200-c))/2$ die Gewinnwahrscheinlichkeit. Dabei können wir aus Symmetriegründen den Fall $c \leq 100$ annehmen. Bei festgehaltenem c wird $p(w,c)$ für $w = c$ maximal. Da $p(c,c)$ für $c = 1$ den Maximalwert $(1 + 99/199)/2 = 0.7487\ldots$ annimmt, lautet die optimale Verteilung: Lege eine weiße Kugel in eine Schachtel und die restlichen 199 Kugeln in die andere.

4.28 Lösung. Für $(a_1, a_2, a_3) \in \Omega := \{0,1\}^3$ sei $a_1 = 1$ (bzw. 0), falls ein A– bzw. B–Schalter vorliegt und $a_2 = 1$ (bzw. 0), falls dieser Schalter defekt (bzw. intakt) ist. Weiter sei $a_3 = 1$ (bzw. = 0), falls der Schalter akzeptiert (bzw. ausgesondert) wurde und somit in den Verkauf gelangt (bzw. nicht in den Verkauf gelangt).
Im Grundraum Ω beschreiben dann

$$\begin{aligned} A &:= \{(a_1,a_2,a_3\} \in \Omega : a_1 = 1\} \\ B &:= \{(a_1,a_2,a_3\} \in \Omega : a_1 = 0\} \end{aligned}$$

die Ereignisse, dass ein A- bzw. B-Schalter vorliegt. Ferner sind

$$D := \{(a_1,a_2,a_3\} \in \Omega : a_2 = 1\}$$

und

$$V := \{(a_1,a_2,a_3\} \in \Omega : a_3 = 1\}$$

die Ereignisse, dass ein Schalter defekt ist bzw. dass ein Schalter in den Verkauf gelangt. Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(D|V)$. Aus der Aufgabenstellung sind die Wahrscheinlichkeiten
$\mathbb{P}(A) = 0.6,\ \mathbb{P}(B) = 0.4,\ \mathbb{P}(D|A) = 0.05,\ \mathbb{P}(D|B) = 0.02,\ \mathbb{P}(V|D^c) = 1$ sowie

$\mathbb{P}(V|D) = 0.05$ bekannt. Nach Definition (4.54) der bedingten Wahrscheinlichkeit gilt

$$\mathbb{P}(D|V) = \frac{\mathbb{P}(D \cap V)}{\mathbb{P}(V)}.$$

Nach der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit (Formel (4.58)) gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(D|A) + \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(D|B)\\ &= 0.6 \cdot 0.05 + 0.4 \cdot 0.02 = 0.038\end{aligned}$$

und somit

$$\mathbb{P}(D \cap V) = \mathbb{P}(D) \cdot \mathbb{P}(V|D) = 0.038 \cdot 0.05 = 0.0019.$$

Wiederum nach der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V) &= \mathbb{P}(D) \cdot \mathbb{P}(V|D) + \mathbb{P}(D^c) \cdot \mathbb{P}(V|D^c)\\ &= 0.038 \cdot 0.05 + (1 - 0.038) \cdot 1 = 0.9981,\end{aligned}$$

also insgesamt

$$\mathbb{P}(D|V) = \frac{0.0019}{0.9981} \approx 0.001904.$$

Es ist also damit zu rechnen, dass knapp $2^{00}/_0$ der in den Verkauf gelangten Geräte einen defekten Schalter aufweisen.

4.29 Lösung. Die im Folgenden dargestellte Stoppstrategie liefert den (größtmöglichen) Erwartungswert 0.2. Sie leitet sich aus der Überlegung ab, nach jedem Zug einer Kugel nur dann eine weitere Kugel zu ziehen, wenn der dadurch zu erwartende Gewinn mindestens gleich dem bereits erreichten Gewinn ist. Dabei stellt ein negativer Gewinn einen Verlust dar.
Wir stoppen, falls die erste Kugel den Wert +1 hat (W' 2/5), andernfalls ziehen wir eine zweite Kugel. Hat diese den Wert +1, so stoppen wir mit dem Gewinn 0, andernfalls ziehen wir eine dritte und vierte Kugel. Haben beide den Wert +1, so stoppen wir (wieder mit dem Gewinn 0), andernfalls ziehen wir die verbleibende fünfte Kugel (welche den Wert +1 hat) und erhalten den „Gewinn" -1, verlieren also eine Geldeinheit. Da der letzte Ausgang nach den Pfadregeln mit der Wahrscheinlichkeit $3/5 \cdot 2/4 \cdot (2/3 \cdot 1/2 + 1/3 \cdot 1) = 1/5$ auftritt (Summe der Wahrscheinlichkeiten der Pfade -1,-1,+1,-1,+1 und -1,-1,-1,+1,+1), gilt mit obiger Strategie für die Summe X der gezogenen Zahlen $\mathbb{P}(X = 1) = 2/5$, $\mathbb{P}(X = -1) = 1/5$, $\mathbb{P}(X = 0) = 2/5$ und somit (Transformationsformel (4.19)) $\mathbb{E}(X) = 1 \cdot 2/5 - 1 \cdot 1/5 = 0.2$.

4.30 Lösung. Aus der Bayes-Formel folgt $1/2$.

4.31 Lösung. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $(1-0.05)(1-0.03)(1-0.02) \approx 0.903$.

4.32 Lösung. (i) $1-(1-p)^n$ (wird in (ii)) für den Spezialfall $k=1$ begründet).

(ii) Die W', dass ein Bauteil intakt ist, ist $1-p^k$ (komplementäre W' und Unabhängigkeit). Die W', dass alle Bauteile intakt sind, ist somit wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit gleich $(1-p^k)^n$. Komplementbildung liefert jetzt die Behauptung.

(iii) $0.2593\ldots\ (k=1), \quad 0.0004498\ldots\ (k=2), \quad 0.0000006749\ldots\ (k=3)$.

4.33 Lösung. Wir wählen den Grundraum Ω aus 4.7.5, interpretieren aber jetzt eine „1" bzw. eine „0" in der zweiten Komponente dahingehend, dass *jeder* der r Tests positiv ausfällt bzw. dass mindestens ein Test negativ ausfällt. Bezeichnen N und K die Ereignisse, dass mindestens ein Test negativ ausfällt bzw. dass die Person die Krankheit K_0 hat, so führen die Voraussetzungen zu den Modellannahmen $\mathbb{P}(K)=q$, $\mathbb{P}(N^c|K)=p_{se}^r$, $\mathbb{P}(N|K^c)=1-(1-p_{sp})^r$. Die Bayes-Formel liefert dann

$$\mathbb{P}(K|N^c) \;=\; \frac{q\cdot p_{se}^r}{q\cdot p_{se}^r+(1-q)\cdot(1-p_{sp})^r}.$$

Im Fall $q=0.0001$, $p_{se}=p_{sp}=0.998$ nimmt diese Wahrscheinlichkeit für $r=1,2,3$ die Werte 0.04753, 0.96139 (!) und 0.99992 (!) an.

4.34 Lösung. Claudia kann 10 mal gleichzeitig mit Peter und unabhängig von ihm ihre Münze werfen. Gezählt werden hierbei die Versuche, bei denen sowohl Peter eine Sechs als auch Claudia einen Adler wirft. Die Wahrscheinlichkeit für einen solchen „Doppeltreffer" ist 1/12. Somit besitzt die in der Aufgabenstellung beschriebene „Anzahl der dabei erzielten Adler" die Binomialverteilung $Bin(10,1/12)$.

4.35 Lösung. (i) $Mult(25;0.1,0.2,0.3,0.4)$

(ii) $Mult(25;0.3,0.3,0.4)$

(iii) $Bin(25;0.6)$

4.36 Lösung. (i) $X\sim Bin(n,(1-p)^k)$.

(ii) $r=(1-p)^k+kp(1-p)^{k-1}+\binom{k}{2}p^2(1-p)^{k-2}$ (Binomialverteilung!);
$Y\sim Bin(n,r)$.