7 Lösungen zu Kapitel 7

7.1 Lösung. Ist f über $[a,b]$ Riemann-integrierbar, so ist f nach Satz 7.10 für alle $\delta > 0$ auch über $[a+\delta, b]$ Riemann-integrierbar. Letzteres sei jetzt vorausgesetzt. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Ferner sei $M = \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$. Dann gibt es eine Zerlegung Z' von $[a + \frac{\varepsilon}{4M}, b]$ mit

$$O(f;Z') - U(f;Z') \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für die Zerlegung $Z := Z' \cup \{a\}$ von $[a,b]$ gilt dann

$$\begin{aligned} O(f;Z) - U(f;Z) &\leq 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + O(f;Z') - U(f;Z') \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Nach dem Riemannschen Kriterium ist f integrierbar.

7.2 Lösung. (i) Die Funktion f ist streng monoton wachsend und stetig. Also ist

$$\begin{aligned} U(f;Z_n) &= \sum_{i=1}^{n} 3^{\frac{i-1}{n}} \Big(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \Big) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 3^{\frac{i-1}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 3^{\frac{i}{n}} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1-(3^{\frac{1}{n}})^n}{1-3^{\frac{1}{n}}} \\ &= \frac{2}{n(3^{\frac{1}{n}}-1)}. \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} O(f;Z_n) &= \sum_{i=1}^{n} 3^{\frac{i}{n}} \Big(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \Big) \\ &= 3^{\frac{1}{n}} U(f;Z_n) \\ &= 3^{\frac{1}{n}} \frac{2}{n(3^{\frac{1}{n}}-1)}. \end{aligned}$$

(ii) Nach der Regel von L'Hospital gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n(3^{\frac{1}{n}}-1) &= \lim_{x\to 0} \frac{3^x - 1}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} (\ln 3) 3^x = \ln 3. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} U(f;Z_n) = \frac{2}{\ln 3}$$

und wegen $\lim_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{n}} = 1$ auch

$$\lim_{n\to\infty} O(f;Z_n) = \frac{2}{\ln 3}.$$

7.3 Lösung. (i) Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{k^2}{n^2}\\ &= \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}\\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx\\ &= \arctan(x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{n-k}{n^2+nk} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1-\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}}\\ &= \int_0^2 \frac{1-x}{1+x}\,dx\\ &= \int_0^2 \Big(-1+\frac{2}{1+x}\Big)\,dx\\ &= -x\Big|_0^2 + 2\log|1+x|\Big|_0^2\\ &= -2+2\log(3).\end{aligned}$$

7.4 Lösung. Für $x \in [0,1)$ gilt

$$F(x) = \int_0^x (t^2+1)\,dt = \Big(\frac{1}{3}t^3+t\Big)\Big|_0^x = \frac{x^3}{3}+x.$$

Für $x \in [1, \infty)$ gilt

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^1 (t^2+1)\,dt + \int_1^x \Big(\sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{z}}\Big)\,dz \\ &= \Big(\frac{1}{3}+1\Big) + \Big(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{t}\Big)\Big|_1^x \\ &= \frac{4}{3} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{x} - \frac{2}{3} - 2 \\ &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{x} - \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Für $x \in (-1, 0]$ gilt

$$\begin{aligned} F(x) &= -\int_x^0 f(t)\,dt = -\int_x^0 (t^2+1)\,dt \\ &= -\Big(\frac{1}{3}t^3 + t\Big)\Big|_x^0 = \frac{1}{3}x^3 + x. \end{aligned}$$

Für $x \in (-\infty, -1]$ gilt

$$\begin{aligned} F(x) &= -\int_x^0 f(t)\,dt = -\int_{-1}^0 (t^2+1)\,dt - \int_x^{-1} (-t)\,dt \\ &= -\frac{1}{3} - 1 + \int_x^{-1} t\,dt = -\frac{4}{3} + \Big(\frac{1}{2}t^2\Big)\Big|_x^{-1} \\ &= -\frac{4}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2 = -\frac{5}{6} - \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

7.5 Lösung. (i) Man benutzt den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} F'(x) &= e^{-t^2}\big|_{t=\sin^2 x} \cdot 2\sin x \cos x \\ &= 2\sin x \cos x e^{-\sin^4 x}. \end{aligned}$$

(ii) Um die Ableitung der Funktion G zu bilden, wählt man c zwischen x^2 und e^x und schreibt

$$G(x) = \int_{x^2}^c \arctan(e^{-t})\,dt + \int_c^{e^x} \arctan(e^{-t})\,dt.$$

Es folgt

$$G'(x) = (-\arctan e^{-x^2}) \cdot 2x + (\arctan e^{-e^x})(e^x).$$

(iii) Für $x > 0$ gilt
$$H(x) = \int_{-x}^{x} t^2 \cos t \, dt$$
und damit
$$H'(x) = x^2 \cos x + (-x)^2 \cos(-x) = 2x^2 \cos x.$$
Für $x < 0$ gilt
$$\begin{aligned} H'(x) &= -(-x)^2 \cos(-x) - x^2 \cos x \\ &= 2x^2 \cos x. \end{aligned}$$
Daraus ergibt sich
$$\lim_{x \to 0+} H'(x) = \lim_{x \to 0-} H'(x) = 0.$$
Aus Satz 6.63 (Anwendung des Mittelwertsatzes!) folgt die Differenzierbarkeit von H für $x = 0$ sowie $H'(0) = 0$.

7.6 Lösung. Es sei
$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 + x^3}}.$$
Für $x \in [0,1]$ gilt $-x^2 + x^3 \leq 0$ und aus der Monotonie des Integrals folgt
$$\int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x \geq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$
Ferner gilt
$$f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{2})^2}}$$
und es folgt
$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) \, dx &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}} \, dx \\ &= \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^1 = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

7.7 Lösung. (i) Es gilt
$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}} \, dx &= \arcsin(2x)\Big|_0^{\frac{1}{4}} \\ &= \arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

(ii) Es gilt

$$\int_0^1 (4x^4 + 3x^3 + 1)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{5}x^5 + \frac{3}{4}x^4 + x\Big|_0^1 = \frac{51}{20}.$$

(iii) Wegen

$$\begin{aligned}(\cos(x) - \sin(x))^2 &= \cos(x)^2 + \sin(x)^2 - 2\sin(x)\cos(x)\\ &= 1 - \sin(2x), \qquad x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (\cos(x)\cdot\sin(x))^2\,dx &= \int_0^\pi 1 - \sin(2x)\,\mathrm{d}x\\ &= x + \frac{1}{2}\cos(2x)\Big|_0^\pi\\ &= \pi + \frac{1}{2}(\cos(2\pi) - \cos(0))\\ &= \pi.\end{aligned}$$

(iv) Wegen

$$\frac{x^2+1}{x+1} = \frac{x^2-1+2}{x+1} = x - 1 + \frac{2}{x+1}, \qquad x \neq -1,$$

gilt

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2+1}{x+1}\,dx &= \int_0^1 \Big(x - 1 + \frac{2}{x+1}\Big)\,dx\\ &= \frac{1}{2}x^2 - x + 2\log|x+1|\Big|_0^1\\ &= -\frac{1}{2} + 2\log(2).\end{aligned}$$

7.8 Lösung. (i) Es gilt

$$x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\int_{-1}^4 |x^2 - 2x|\,dx &= \int_{-1}^0 (x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 (2x - x^2)\,dx + \int_2^4 (x^2 - 2x)\,dx\\ &= \Big(\frac{x^3}{3} - x^2\Big)\Big|_{-1}^0 + \Big(x^2 - \frac{x^3}{3}\Big)\Big|_0^2 + \Big(\frac{x^3}{3} - x^2\Big)\Big|_2^4\\ &= \frac{1}{3} + 1 + 4 - \frac{8}{3} + \frac{64}{3} - 16 - \frac{8}{3} + 4 = \frac{28}{3}.\end{aligned}$$

(ii) Die Funktion

$$f(x) := \frac{\sin x \cdot \cos x}{1 + \sin^2 x}$$

ist ungerade. Also ergibt sich

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

(iii) Die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{5^n} x^n$$

hat den Konvergenzbereich $(-5, 5)$. Nach Satz 7.23 (Integration von Potenzreihen) gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x)\,dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^{1} \frac{n+1}{5^n} x^n\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^n}\Big|_{-1}^{1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{5^n} - \frac{(-1)^{n+1}}{5^n}\Big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{5}\Big)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)}{5^n} \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{5}} + \frac{1}{1+\frac{1}{5}} = \frac{1+\frac{1}{5}+1-\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{25}{12}.
\end{aligned}$$

7.9 Lösung. (i) Man hat die folgende Kette von Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
f(x) \le G(x) &\Longleftrightarrow \cos^2 x - \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \le 0 \\
&\Longleftrightarrow x\cos^2 x - \int_0^x f(t)\,dt \le 0.
\end{aligned}$$

Für

$$h(x) := x\cos^2 x - \int_0^x f(t)\,dt$$

gilt $h(0) = 0$ sowie

$$h'(x) = \cos^2 x - 2x\sin x\cos x - \cos^2 x = 2x\sin x\cos x,$$

d.h. $h'(x) \leq 0$ für jedes $x \in (0,1]$. Also ist h monoton fallend, und es folgt

$$h(x) \leq h(0) = 0, \qquad x \in (0,1],$$

d.h. $f(x) \leq G(x)$.

(ii) Es ist

$$G'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt + \frac{1}{x}f(x),$$

und aus (i) folgt

$$G'(x) \leq -\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt + \frac{1}{x}\Big(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\Big) = 0.$$

(iii) Nach der Regel von L'Hospital gilt

$$\lim_{x\to 0+} G(x) = \lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^x \cos^2 t\,dt}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{\cos^2 x}{1} = 1.$$

(iv) Wiederum folgt mit L'Hospital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} G'(x) &= \lim_{x\to 0+}\frac{-\int_0^x f(t)\,dt + xf(x)}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0+}\frac{-f(x)+f(x)+xf'(x)}{2x}\\ &= \lim_{x\to 0+}\frac{1}{2}f'(x) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0+} 2x\sin x\cos x = 0.\end{aligned}$$

(v) Für $t \in [0,1]$ gilt $\cos^2 t \leq \cos t$, und es folgt

$$\begin{aligned}G(1) &= \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \cos^2 t\,dt \leq \int_0^1 \cos t\,dt\\ &= \sin t\Big|_0^1 = \sin 1.\end{aligned}$$

7.10 Lösung. (i) Es gilt für jedes $c > 0$

$$\int_0^c \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^c = 1 - \mathrm{e}^{-c} \to 1 \qquad (c \to \infty).$$

Somit existiert $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,dx$, und es gilt $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$.

(ii) Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x/(x^5+1)$, $x \geq 0$. Es gelten

$$f(x) \leq \frac{x}{x^5} = \frac{1}{x^4}, \qquad x \geq 1,$$

und für jedes $c > 1$

$$\int_1^c x^{-4}\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}x^{-3}\Big|_1^c = \frac{1}{3}(1-c^{-3}) \to \frac{1}{3} \qquad (c \to \infty).$$

Nach dem Majorantenkriterium existiert $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ und somit auch $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, denn f ist stetig auf $[0,1]$.

(iii) Es gelten

$$\int_0^{2k\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(2k\pi) - \sin(0) = 0 \to 0 \qquad (k \to \infty),$$
$$\int_0^{(2k+\frac{1}{2})\pi} \cos(x)\,dx = \sin((2k+\frac{1}{2})\pi) - \sin(0) = 1 \to 1 \qquad (k \to \infty).$$

Somit existiert $\int_0^\infty \cos(x)\,dx$ nicht.

7.11 Lösung. Die Funktion $f : [2,\infty) \to [0,\infty)$,

$$f(x) := \frac{1}{x(\log(x))^\alpha}, \qquad x \geq 2,$$

ist monoton fallend und nichtnegativ. Mit der Substitution $y = \log x$, $\mathrm{d}y = x^{-1}\,\mathrm{d}x$ ergibt sich

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\log(x))^\alpha}\,dx = \int_{\log(2)}^\infty \frac{1}{y^\alpha}\,dy.$$

Gemäß Beispiel 7.25 konvergiert dieses Integral für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha = 1$. Somit konvergiert die Reihe nach dem Integralkriterium für $\alpha > 1$, und sie divergiert für $\alpha = 1$.

7.12 Lösung. Wegen $x^{k+2}2^{-x} \to 0$ für $x \to \infty$ gibt es ein $C > 0$ mit

$$x^k 2^{-x} \leq Cx^{-2}, \qquad x \geq 1.$$

Wegen $\int\limits_1^\infty x^{-2}\,\mathrm{d}x < \infty$ impliziert das Majorantenkriterium die Konvergenz von $\int_1^\infty x^k 2^{-x}\,dx$.

7.13 Lösung. (i) Mit der Substitution $y = x + 1$ und partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}\int \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) dx &= \int 1 \cdot \arctan\left(\frac{1}{y}\right) dy \\ &= y \arctan(y^{-1}) - \int y \cdot \frac{1}{1+y^{-2}} \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) dy \\ &= y \arctan(y^{-1}) + \int \frac{y}{y^2+1}\, dy.\end{aligned}$$

Mit der Substitution $z = y^2$ ($dz = 2ydy$) im zweiten Integralausdruck folgt

$$\begin{aligned}\int \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}x &= y \arctan(y^{-1}) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{z+1}\, \mathrm{d}z \\ &= y \arctan(y^{-1}) + \frac{1}{2} \cdot \log|z+1| \\ &= (x+1) \arctan((x+1)^{-1}) + \frac{1}{2} \cdot \log((x+1)^2 + 1).\end{aligned}$$

(ii) Mit der Substitution $y = \sin(x)$ und $\mathrm{d}y = \cos(x)\mathrm{d}x$ sowie wegen der Gleichung $\cos(x)^2 = 1 - \sin(x)^2$ folgt

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos(x)}\, \mathrm{d}x &= \int \frac{\cos(x)}{(\cos(x))^2}\, dx \\ &= \int \frac{\cos(x)}{1-(\sin(x))^2}\, dx \\ &= \int \frac{1}{1-y^2}\, \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1-y+1+y}{(1-y)(1+y)}\, dy \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y}\right) dy \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\log|1+y| - \log|1-y|) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\log(1+\sin(x)) - \log(1-\sin(x))).\end{aligned}$$

7.14 Lösung. (i) Man substituiert $u := x^3$ ($du = 3x^2\, dx$) und erhält

$$\int x^2 \cos(x^3)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \int \cos u\, \mathrm{d}u \Big|_{u=x^3} = \frac{1}{3} \sin x^3.$$

(ii) Mit der Substitution $u = 4 - \sin 2x$ ($du = -\cos 2x \cdot 2\,dx$) erhält man

$$\int (\cos 2x)\sqrt{4-\sin 2x}\,dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{u}du\Big|_{u=4-\sin 2x} = -\frac{1}{3}(4-\sin 2x)^{\frac{3}{2}}.$$

(iii) Mit $u' = 2x\cos x^2$ und $v = \sin x^2$ folgt aus partieller Integration

$$\int 2x\cos x^2 \sin x^2\,dx = (\sin x^2)^2 - \int (\sin x^2)2x\cos x^2\,dx,$$

d.h.

$$\int 2x\cos x^2\sin x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\sin x^2)^2.$$

(iv) Mit der Substitution $u := x-1$ folgt

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx &= \int \frac{2u+2}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u\Big|_{u=x-1}\\ &= -\int \frac{-2u}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u\Big|_{u=x-1} + 2\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u\Big|_{u=x-1}\\ &= -2\sqrt{1-u^2}\Big|_{u=x-1} + 2\arcsin u\Big|_{u=x-1}\\ &= 2\arcsin(x-1) - 2\sqrt{1-(x-1)^2}.\end{aligned}$$

7.15 Lösung. (i) Das Integral $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}+\ln x}$ konvergiert, da für $x \geq 1$

$$0 \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}+\ln x} \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

gilt und

$$\int_1^\infty x^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = -2x^{-\frac{1}{2}}\Big|_1^\infty = 2$$

ist.

(ii) Das Integral

$$I_2 = \int_0^1 \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x}+x^2}\,dx + \int_1^\infty \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x}+x^2}\,dx$$

ist konvergent. Der erste Integrand liegt nämlich zwischen 0 und $\frac{1}{\sqrt{x}}$, und es gilt

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2.$$

Der zweite Integrand liegt zwischen 0 und e^{-2x}, und es gilt

$$\int_1^\infty e^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{e^{-2x}}{2}\Big|_1^\infty = \frac{1}{2}.$$

(iii) Das Integral $I_3 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\arctan x}$ ist divergent. Für $x \in (0,1]$ gilt nämlich die Ungleichung $\arctan x < x$ und deshalb

$$I_3 \geq \int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x\Big|_0^1 = \infty.$$

(iv) Das Integral $I_4 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sinh x}}$ konvergiert. Für $x \in [0,1]$ gilt nämlich die Ungleichung $\sinh x \geq x$ und deshalb

$$I_3 \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2.$$

7.16 Lösung. Man betrachte die Funktion

$$f(x) := \frac{1}{x} - \ln\frac{x+1}{x} = \frac{1}{x} + \ln x - \ln(x+1), \qquad x \geq 2.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2(x+1)}(-(x+1) + x(x+1) - x^2) \\ &= -\frac{1}{x^2(x+1)} < 0. \end{aligned}$$

Also ist f (strikt) monoton fallend. Nach Satz 7.27 (Integralkriterium) ist die Konvergenz der Reihe zur Konvergenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_2^\infty \Big(\frac{1}{x} - \ln\frac{x}{x+1}\Big)\,\mathrm{d}x$$

äquivalent. Nun ist

$$\begin{aligned} \int \Big(\frac{1}{x} + \ln x - \ln(x+1)\Big)\,\mathrm{d}x &= \ln x + x(\ln x - 1) - (x+1)[\ln(x+1) - 1] \\ &= \ln x - \ln(x+1) + x(\ln x - \ln(x+1)) + 1 \\ &= (x+1)\ln\frac{x}{x+1} + 1 \\ &= \ln\Big(\frac{x+1-1}{x+1}\Big)^{x+1} + 1. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\int_2^\infty f(x)\,dx &= \ln\Big(1-\frac{1}{x+1}\Big)^{x+1}\Big|_2^\infty\\ &= \lim_{x\to\infty}\ln\Big(1-\frac{1}{x+1}\Big)^{x+1} - \ln\Big(\frac{2}{3}\Big)^3\\ &= \ln e^{-1} - 3\ln\frac{2}{3} = -1-3\ln\frac{2}{3} < \infty.\end{aligned}$$

Die Reihe konvergiert.

7.17 Lösung. Für $\alpha > 1$ gilt

$$F'_\alpha(x) = (1-\alpha)[\ln(\ln x)]^{-\alpha}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}.$$

Die Funktion

$$G_\alpha(x) := \frac{1}{x\ln x[\ln(\ln x)]^\alpha},\qquad x\geq 3,$$

ist monoton fallend. Nach dem Integralkriterium ergibt sich die Konvergenz der Reihe aus der Konvergenz von

$$\int_3^\infty G_\alpha(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\alpha}F_\alpha(x)\Big|_3^\infty < \infty.$$

Für $\alpha = 1$ gilt

$$F'_1(x) = \frac{1}{\ln(\ln x)}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}.$$

Damit ergibt sich die Divergenz der Reihe aus der Divergenz von

$$\int_3^\infty G_1(x)\,\mathrm{d}x = F_1(x)\Big|_3^\infty.$$

7.18 Lösung. Der Beweis erfolgt mittels vollständiger Induktion. Für $n = 0$ gilt

$$\begin{aligned}R_0(x;f;0) &= f(x) - T_0(x;f;0) = f(x) - f(0)\\ &= \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{0!}\int_0^x (x-t)^0 f'(t)\,dt.\end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass die Behauptung für $n\in\mathbb{N}$ richtig ist, ergibt sich für $n+1$

$$\begin{aligned}R_{n+1}(x;f;0) &= f(x) - \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i - \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}\\ &= \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt - \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}.\end{aligned}$$

Mit Hilfe partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}R_{n+1}(x;f;0) =& \frac{1}{n!}\Big(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(t)\Big)\Big|_0^x \\ &+ \frac{1}{n!}\int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+2)}(t)\,dt - \frac{f^{n+1}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} \\ =& \frac{1}{(n+1)!}\int_0^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,dt.\end{aligned}$$