1 Übungsaufgaben zu Kapitel 1

1.1 Aufgabe. Geben Sie zu den Spalten F_1, F_2 und F_3 jeweils mindestens eine mit den Aussagen A, B, C (unter Benutzung von $\wedge, \vee, \neg$) gebildete Aussagenverknüpfungen an, die diese Wahrheitswerte besitzt.

A	B	C	F_1	F_2	F_3
w	w	w	w	w	f
w	w	f	f	w	w
w	f	w	f	f	w
w	f	f	f	f	f
f	w	w	f	f	w
f	w	f	f	f	f
f	f	w	f	f	f
f	f	f	f	f	w

1.2 Aufgabe. Bilden Sie die Negation folgender (falscher) Aussagen.

(i) Alle Arbeitnehmer, die monatlich über 300 EURO verdienen oder in mehr als einem Arbeitsverhältnis stehen, bezahlen Lohnsteuer.

(ii) Alle Tiere haben Beine oder Flossen, und alle Pflanzen haben Wurzeln.

(iii) Es gibt einen Käfer oder einen Schmetterling, der schneller ist als alle Fische und Landtiere.

(iv) Alle Straßen und mindestens ein Pfad führen nach Rom.

1.3 Aufgabe. Welche der folgenden Mengenbeziehungen sind für *beliebige* Mengen $A, B, C, D, \ldots$ immer richtig, welche für beliebige Mengen nicht immer richtig? Die richtigen Beziehungen sind zu beweisen, die falschen durch ein Gegenbeispiel (z.B. durch ein Diagramm) zu widerlegen.

(i) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap B$.

(ii) $(A \triangle B) \triangle C = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$.

(iii) $(A \cup B) \cap C \subset A \cup (B \cap C)$.

(iv) $(D \setminus A) \cup (D \setminus B) \cup (D \setminus C) = D \setminus (A \cap B \cap C)$.

1.4 Aufgabe. Gegeben seien die halboffenen Intervalle

$$A_i := \begin{cases} (\frac{1}{i}, 3 + \frac{1}{i}], & \text{für gerade } i \in \mathbb{N}, \\ (-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}], & \text{für ungerade } i \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

(i) $$A := \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=m}^{\infty} A_i \right) = (A_1 \cap A_2 \cap \ldots) \cup (A_2 \cap A_3 \cap \ldots) \cup (A_3 \cap A_4 \cap \ldots) \cup \ldots .$$

(i) $$B := \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=m}^{\infty} A_i \right) = (A_1 \cup A_2 \cup \ldots) \cap (A_2 \cup A_3 \cup \ldots) \cap (A_3 \cup A_4 \cup \ldots) \cap \ldots .$$

1.5 Aufgabe. Es seien A_i, $i \in \mathbb{N}$, beliebige Mengen sowie

$$A := \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=m}^{\infty} A_i \right), \qquad B := \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=m}^{\infty} A_i \right).$$

Man zeige die Inklusion $A \subset B$.