2 Übungsaufgaben zu Kapitel 2

2.1 Aufgabe. Man untersuche, ob die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) := (2x)^3 - y^2$$

injektiv bzw. surjektiv ist. (Beweis oder Gegenbeispiel!)

2.2 Aufgabe. Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \setminus \{4/3\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \frac{1}{3x - 4},$$
$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) = \frac{1}{x} + 4.$$

Man untersuche, ob man die Komposition $g \circ f$ bzw. $f \circ g$ bilden kann und falls ja, ob diese Komposition eine injektive bzw. eine bijektive Abbildung ist.

2.3 Aufgabe. Es seien X, Y und Z nichtleere Mengen und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen. Man beweise oder widerlege die Implikationen

$$(f \text{ und } g \text{ bijektiv}) \Longrightarrow (g \circ f \text{ bijektiv}),$$
$$(g \circ f \text{ bijektiv}) \Longrightarrow (f \text{ bijektiv und } g \text{ bijektiv}).$$

2.4 Aufgabe. Man betrachte die durch

$$x \mapsto f(x) := 2|x + 3| + \frac{2x + 7 + |2x + 7|}{4x + 14}$$

definierte Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.

(i) Man beweise die Gültigkeit der Beziehung $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$.

(ii) Man gebe eine „Vorschrift“ g an, mit deren Hilfe man zu jedem $n \in \mathbb{N}$ alle $x \in \mathbb{Z}$ mit $f(x) = n$ berechnen kann. Warum ist g die Umkehrfunktion von $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$?

2.5 Aufgabe. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch

$$f(x) := \begin{cases} (x-1)^2, & x \geq 1, \\ \frac{1}{x-1}, & x < 1, \end{cases}$$

definierte Funktion. Man zeige, dass f bijektiv ist, und berechne f^{-1}.

2.6 Aufgabe. Welche der folgenden Abbildungen sind surjektiv, injektiv oder bijektiv? Von jeder Abbildung ist das Bild und gegebenenfalls die Umkehrabbildung anzugeben.

(i) $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad x \mapsto x^2,$

(ii) $f_2 : \mathbb{R} \to [0, \infty), \quad x \mapsto x^2,$

(iii) $f_3 : (-\infty, 3) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{1}{x-3},$

(iv) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} -x^2 + 4x, & \text{für } x < 1, \\ x^2 - 2x + 4, & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$

2.7 Aufgabe. (i) Man zeige anhand von drei Beispielen, dass die Eigenschaften der Reflexivität, Symmetrie und Antisymmetrie einer Relation R auf der Menge $A = \{1, 2, 3\}$ insofern voneinander unabhängig sind, als man aus der Gültigkeit von jeweils zwei dieser Eigenschaften nicht schließen kann, dass auch die dritte Eigenschaft erfüllt ist.

(ii) Gibt es eine Relation R auf der Menge $\mathbb{N}$, die reflexiv, symmetrisch und antisymmetrisch, aber nicht transitiv ist? (Begründung!)

(iii) Gibt es eine Relation R, die vollständig und nicht reflexiv ist?

2.8 Aufgabe. Auf $\mathbb{R}$ seien die Relationen $R_1, R_2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ erklärt durch:

$$xR_1y :\Longleftrightarrow |x - y| \leq 2 \ ,$$
$$xR_2y :\Longleftrightarrow |x - y| \in \mathbb{Z} \ .$$

Man untersuche, ob R_1 bzw. R_2 eine Äquivalenzrelation darstellt. Hierbei kann die Veranschaulichung der Graphen von R_1 und R_2 in einem Koordinatensystem hilfreich sein.

2.9 Aufgabe. Auf $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ seien die Relationen $R_1, R_2 \subset X \times X$ erklärt durch:

$$R_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\},$$
$$R_2 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (4, 3), (5, 1), (5, 4)\}.$$

Welche Elemente aus $X \times X$ müssen mindestens hinzugenommen werden, um aus R_1 und R_2 Präferenzrelationen R_1^* bzw. R_2^* zu erhalten? Sind diese Erweiterungen R_1^* und R_2^* eindeutig bestimmt? Welche der Relationen R_1^* und R_2^* ist eine Totalordnung?

2.10 Aufgabe. Auf $X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0\})$ sei folgende Relation R definiert:

$$(z_1, z_2)R(z_1', z_2') :\Longleftrightarrow z_1 z_2' = z_1' z_2$$

(i) Man beweise, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

(ii) Man zeige, dass die durch $\varphi(z_1, z_2) := z_1/z_2$ definierte Abbildung $\varphi : X \to \mathbb{Q}$ surjektiv, aber nicht injektiv ist.

(iii) Es sei $[(z_1, z_2)]$ die durch R erzeugte Äquivalenzklasse von (z_1, z_2). Man zeige, dass durch die in (ii) definierte Abbildung φ diese Äquivalenzklassen bijektiv auf $\mathbb{Q}$ abgebildet werden.