3 Übungsaufgaben zu Kapitel 3

3.1 Aufgabe. Es sei $0 < a_i < 1$ für $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \geq 2$ die Ungleichung

$$1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_n < (1 - a_1)(1 - a_2) \cdot \ldots \cdot (1 - a_n)$$

erfüllt ist.

3.2 Aufgabe. Es seien c eine reelle Zahl und k eine natürliche Zahl.

(i) Zeigen Sie, dass die Aussage

$$A_k : \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{k^2} \leq c - \frac{1}{k}$$

die Aussage

$$A_{k+1} : \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{j^2} \leq c - \frac{1}{k+1}$$

impliziert, d.h. $A_k \Longrightarrow A_{k+1}$.

(ii) Wie groß muss c mindestens gewählt werden, damit für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j^2} \leq c - \frac{1}{k}$$

erfüllt ist?

3.3 Aufgabe. Es seien $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 7$. Für $n = 3, 4, 5, \ldots$ sei a_n durch die Rekursionsformel

$$a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$$

gegeben. Beweisen Sie durch vollständige Induktion die All-Aussage

$$a_n = 1 + n + n^2, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3.4 Aufgabe. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$(2n + 1)^2 - 2m^3 = 0, \qquad n, m \in \mathbb{Z}$$

im Bereich der ganzen Zahlen keine Lösung hat.

3.5 Aufgabe. Zeigen Sie, dass für die folgende Formel der Induktionsschluss von n auf $n+1$ gelingt, obwohl sich keine natürliche Zahl angeben lässt, die diese Beziehung erfüllt:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{3n+1}{2n+1}.$$

Tatsächlich erhält man unter Verwendung einer Teleskopsumme

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}.\end{aligned}$$

3.6 Aufgabe. Es seien $a_1 = 4$ und $a_{n+1} = a_n + (n+1)(3n+4)$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$a_n = n(n+1)^2$$

erfüllt ist.

3.7 Aufgabe. Es seien $b_1 = 2$, $b_2 = 8$ und $b_{n+2} = 2b_{n+1} - b_n + 4$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$b_n = 2n^2$$

erfüllt ist.

3.8 Aufgabe. Es seien $k \in \mathbb{N}$ und M und N endliche Mengen mit $\operatorname{card} M = \operatorname{card} N = k$. Ferner sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Man zeige:

(i) f injektiv $\implies f$ bijektiv.

(ii) f surjektiv $\implies f$ bijektiv.

(iii) Man belege durch Beispiele, dass die Implikationen (i) und (ii) im Fall $M = N = \mathbb{N}$ im Allgemeinen falsch sind.

Hinweis zu (i) und (ii): Man benutze Induktion über k.

3.9 Aufgabe. Es sei M eine endliche Menge und $f : M \to M$ eine Abbildung.

(i) Man zeige, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$f^{n+1}(M) = f^n(M).$$

gibt.

(ii) Mit n aus (i) sei $N := f^n(M)$. Dann ist $f(x) \in N$ für $x \in N$. Man zeige, dass die Abbildung

$$g:\ N \to N,\ x \mapsto f(x)$$

bijektiv ist.

(iii) Sei speziell $M = \{1, 2, 3\}$ und f gegeben durch

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 3, \quad f(3) = 2.$$

Man bestimme das kleinstmögliche n aus (i) sowie die dazugehörigen Größen N und g.