4 Übungsaufgaben zu Kapitel 4

4.1 Aufgabe. In einer Schachtel liegen vier mit 1 bis 4 nummerierte Kugeln. Wie lautet die Ergebnismenge, wenn zwei Kugeln mit einem Griff gezogen werden?

4.2 Aufgabe. Welche Ergebnismenge ist beim *Zahlenlotto 6 aus 49* angemessen, wenn

(i) nur die Ziehung der 6 Lottozahlen (ohne Zusatzzahl),

(ii) das Ziehen der 6 Lottozahlen mit Zusatzzahl

beschrieben werden soll? (Das Ziehungsgerät enthält 49 Kugeln, die von 1 bis 49 nummeriert sind.)

4.3 Aufgabe. Es seien $A,\ B,\ C$ Ereignisse in einem Grundraum Ω. Geben Sie die folgenden Ereignisse in Mengenschreibweise an:

(i) Es tritt A, aber weder B noch C ein.

(ii) Es treten genau zwei der drei Ereignisse ein.

(iii) Es tritt höchstens eines der drei Ereignisse ein.

4.4 Aufgabe. Es seien Ω ein Grundraum und $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse. Beschreiben Sie die folgenden Ereignisse mengentheoretisch:

(i) Keines der Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ tritt ein.

(ii) Genau eines der Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ tritt ein.

(iii) Genau $n-1$ der Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ treten ein.

4.5 Aufgabe. Es seien A und B Ereignisse in einem Grundraum Ω. Zeigen Sie:

(i) $\mathbf{1}_{A^c} = \mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_A$,

(ii) $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A\cap B}$,

(iii) $A \subset B \iff \mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_B$.

4.6 Aufgabe. Ein Versuch mit den möglichen Ergebnissen *Treffer* (1) und *Niete* (0) werde $2 \cdot n$–mal durchgeführt. Hierbei ist n eine natürliche Zahl. Die ersten (bzw. zweiten) n Versuche bilden die erste (bzw. zweite) Versuchsreihe. Beschreiben Sie folgende Ereignisse mit Hilfe geeigneter Zählvariablen:

(i) In der ersten Versuchsreihe tritt mindestens ein Treffer auf.

(ii) In beiden Versuchsreihen treten gleich viele Treffer auf.

(iii) Die zweite Versuchsreihe liefert mehr Treffer als die erste.

(iv) In jeder Versuchsreihe gibt es mindestens eine Niete.

4.7 Aufgabe. In der Situation des zweifachen Würfelwurfs bezeichne die Zufallsvariable X_k das Ergebnis des k–ten Wurfes $(k = 1, 2)$. Welche möglichen Werte nehmen die Zufallsvariablen $X_1 - X_2$, $X_1 \cdot X_2$ und $X_1 - 2 \cdot X_2$ an?

4.8 Aufgabe. Ein Würfel wird höchstens dreimal geworfen. Erscheint eine Sechs zum ersten Mal im j–ten Wurf ($j = 1, 2, 3$), so erhält eine Person a_j Euro, und das Spiel ist beendet. Hierbei sei $a_1 = 100$, $a_2 = 50$ und $a_3 = 10$. Erscheint auch im dritten Wurf noch keine Sechs, so sind 30 Euro an die Bank zu zahlen, und das Spiel ist ebenfalls beendet. Beschreiben Sie den Spielgewinn mit Hilfe einer Zufallsvariablen auf einem geeigneten Grundraum.

4.9 Aufgabe. In einem Saal befinden sich 480 Frauen und 520 Männer. 630 Personen seien höchstens 39 Jahre alt. 20 % aller Frauen seien mindestens 40 Jahre alt. Wieviel Prozent aller Männer sind höchstens 39 Jahre alt?

4.10 Aufgabe. In einem endlichen W–Raum $(\Omega, \mathbb{P})$ seien A, B Ereignisse mit $\mathbb{P}(A) \geq 0.99$ und $\mathbb{P}(B) \geq 0.97$. Beweisen Sie die Ungleichung $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0.96$. Versuchen Sie, dieses Resultat über „kleine Ausnahmewahrscheinlichkeiten“ zu verallgemeinern, indem Sie anstelle der Werte 0.99 und 0.97 allgemeine Wahrscheinlichkeiten einsetzen.

4.11 Aufgabe. Zeigen Sie das *Additionsgesetz für drei Ereignisse*:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

4.12 Aufgabe. Umgangssprachlich sagt man oft, die „Chance für das Eintreten eines Ereignisses A sei „$a : b$“, wobei $a, b \in \mathbb{N}$. Welche Wahrscheinlichkeit entspricht dieser „Chance“?

4.13 Aufgabe. Welche Verteilung besitzt die Differenz X der Augenzahlen beim zweifachen Würfelwurf?

4.14 Aufgabe. In einem endlichen W–Raum $(\Omega, \mathbb{P})$ seien A, B Ereignisse. Zeigen Sie:

(i) $\mathbb{P}(A^c \cap B^c) + \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c \cap B) = 1$.

(ii) $\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)P(B) = \mathbb{P}(A^c \cap B^c) - \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)$.

4.15 Aufgabe. Versuchen Sie, einen endlichen W–Raum $(\Omega, \mathbb{P})$ zu konstruieren, in dem es verschiedene Ereignisse A, B positiver Wahrscheinlichkeit mit der Eigenschaft

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq 9 \cdot \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

gibt. Kann die Zahl 9 sogar durch 99 (oder eine noch größere Zahl) ersetzt werden?

4.16 Aufgabe. Zwei homogene Münzen werden gleichzeitig geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass verschiedene Symbole oben liegen?

4.17 Aufgabe. Leiten Sie die Verteilung der Augensumme beim dreifachen Würfelwurf her.

4.18 Aufgabe. Es sei $\Omega := Per_n^n(oW)$ die Menge der Permutationen der Zahlen $1, \ldots, n$ und $A_j := \{(a_1, \ldots, a_n) \in \Omega : a_j < j\} \quad (j = 2, \ldots, n)$. Zeigen Sie: Unter einem Laplace–Modell gilt

$$\mathbb{E}\left(\sum_{j=2}^{n} \mathbf{1}_{A_j}\right) \;=\; \frac{n-1}{2}.$$

4.19 Aufgabe. Ein echter Würfel wird n mal nacheinander geworfen (Laplace–Modell $(\Omega, \mathbb{P})$ mit $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^n$). Die Zufallsvariable Y_n sei die größte der geworfenen Augenzahlen, also $Y_n(a_1, \ldots, a_n) := \max_{1 \leq j \leq n} a_j, \; (a_1, \ldots, a_n) \in \Omega$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}(Y_n) \;=\; 6.$$

4.20 Aufgabe. Ihnen wird folgendes Spiel angeboten: Sie dürfen eine Münze (Zahl/Wappen) 4 mal werfen (Laplace–Modell). Erscheint in jedem Wurf Wappen, so gewinnen Sie 20 Euro. Erscheint in genau 3 Würfen Wappen, so werden Ihnen 10 Euro ausbezahlt. Würden Sie dieses Spiel für einen Einsatz von 4 Euro pro Spiel einen ganzen Abend lang spielen?

4.21 Aufgabe. Aus fünf Männern und fünf Frauen werden fünf Personen rein zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält die Stichprobe höchstens zwei Frauen? Ist das Ergebnis ohne Rechnung einzusehen?

4.22 Aufgabe. Eine Warenlieferung enthalte 40 intakte und 10 defekte Stücke. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Stichprobe vom Umfang 10

(i) genau zwei defekte Stücke enthält?

(ii) mindestens zwei defekte Stücke enthält?

4.23 Aufgabe. Es sei Y_n die größte Augenzahl beim n–maligen unabhängigen Werfen mit einem echten Würfel. Zeigen Sie: $\lim_{n \to \infty} \mathbb{V}(Y_n) = 0$.

4.24 Aufgabe. Gibt es eine nichtnegative Zufallsvariable X (d.h. $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$) mit den Eigenschaften $\mathbb{E}(X) \leq 1/1000$ und $\mathbb{V}(X) \geq 1000$?

4.25 Aufgabe. Eine Urne enthalte zwei rote, zwei schwarze und zwei blaue Kugeln. Es werden zwei Kugeln rein zufällig „mit einem Griff“ entnommen. Danach wird rein zufällig aus den restlichen vier Kugeln eine Kugel gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie rot? Ist das Ergebnis ohne Rechnung aufgrund einer Symmetriebetrachtung einzusehen?

4.26 Aufgabe. In einer Urne befinden sich zwei rote und drei schwarze Kugeln. Eine Kugel wird rein zufällig entnommen und durch eine Kugel der *anderen* Farbe ersetzt. Dieser Vorgang wird noch einmal wiederholt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine danach zufällig entnommene Kugel rot?

4.27 Aufgabe. Um in der Spielshow „Randotime“ den Hauptpreis zu gewinnen, erhält ein Kandidat zwei Schachteln sowie 100 weiße und 100 schwarze Kugeln. Er darf die Kugeln nach Belieben auf beide Schachteln zu verteilen, wobei nur keine Schachtel leer bleiben darf. Danach wählt er „blind“ eine Schachtel aus und zieht daraus rein zufällig eine Kugel. Er erhält den Hauptpreis, falls die gezogene Kugel weiß ist. Wie sollte der Kandidat die Verteilung der Kugeln vornehmen, um die Gewinnwahrscheinlichkeit zu maximieren, und wie groß ist diese dann?

4.28 Aufgabe. Eine Fabrik stellt ein Gerät her, welches einen elektronischen Schalter enthält. Dieser Schalter wird von zwei Firmen A und B bezogen, wobei 60% aller Schalter von A und 40% aller Schalter von B stammen. Erfahrungsgemäß sind 5% aller A–Schalter und 2% aller B–Schalter defekt. Die Endkontrolle der Fabrik akzeptiert jeden intakten Schalter und fälschlicherweise auch 5% aller defekten Schalter. Modellieren Sie die Situation durch ein geeignetes mehrstufiges Experiment und bestimmen Sie in diesem Modell die Wahrscheinlichkeit, dass ein in den Verkauf gelangtes Gerät einen defekten Schalter besitzt.

4.29 Aufgabe. Eine Urne enthält drei Kugeln mit dem Wert -1 und zwei Kugeln mit dem Wert +1. Man darf die Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen ziehen und diesen Vorgang nach Belieben stoppen, wobei die Summe X der gezogenen Zahlen der Gewinn ist. Finden Sie eine Stoppstrategie, für die der Erwartungswert von X positiv ist.

4.30 Aufgabe. Eine Urne enthalte zwei rote und drei schwarze Kugeln. Es wird rein zufällig eine Kugel gezogen und diese sowie eine weitere Kugel der gleichen Farbe in die Urne zurückgelegt. Nach gutem Mischen wird abermals eine Kugel gezogen; sie sei rot. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war die erste gezogene Kugel rot?

4.31 Aufgabe. Der Zusammenbau eines elektronischen Gerätes erfolgt in drei voneinander unabhängigen Arbeitsvorgängen, in denen mit den Wahrscheinlichkeiten 0.05 bzw. 0.03 bzw. 0.02 Fehler unterlaufen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit verlässt das Gerät das Werk in einwandfreiem Zustand?

4.32 Aufgabe. Ein kompliziertes technisches Gerät bestehe aus n Einzelteilen, welche innerhalb eines festen Zeitraumes unabhängig voneinander mit derselben Wahrscheinlichkeit p ausfallen. Das Gerät ist nur funktionstüchtig, wenn jedes Einzelteil funktionstüchtig ist.

(i) Welche Ausfallwahrscheinlichkeit besitzt das Gerät?

(ii) Durch Parallelschaltung identischer Bauelemente zu jedem der n Einzelteile soll die Ausfallsicherheit des Gerätes erhöht werden. Bei Ausfall eines Bauelements übernimmt dann automatisch eines der noch funktionierenden Parallel–Elemente die Aufgabe des ausgefallenen Bauteils. Beim *Triplex-Blindlandesystem* für Düsenflugzeuge ist z.B. jedes Bauelement dreifach vorhanden. Zeigen Sie: Ist jedes Einzelteil k-fach parallel geschaltet, und sind alle Ausfälle voneinander unabhängig, so ist die Ausfallwahrscheinlichkeit des Gerätes gleich $1-(1-p^k)^n$.

(iii) Welche Ausfallwahrscheinlichkeiten ergeben sich für $n = 200$, $p = 0.0015$ und die Fälle $k = 1$, $k = 2$ und $k = 3$?

4.33 Aufgabe. In der Situation von Abschnitt 4.7.5 habe sich eine Person r-mal einem ELISA-Test unterzogen. Wir nehmen an, dass die einzelnen Testergebnisse – unabhängig davon, ob die Krankheit vorliegt oder nicht – als stochastisch unabhängige Ereignisse angesehen werden können. Zeigen Sie: Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die Person die Krankheit besitzt, wenn alle r Tests positiv ausfallen, ist durch

$$\frac{q \cdot p_{se}^r}{q \cdot p_{se}^r + (1-q) \cdot (1-p_{sp})^r}$$

gegeben. Was ergibt sich speziell für $q = 0.0001$, $p_{se} = p_{sp} = 0.998$ und $r = 1, 2, 3$?

4.34 Aufgabe. Peter würfelt 10 mal in unabhängiger Folge mit einem echten Würfel. Jedes Mal, wenn Peter eine Sechs würfelt, wirft Claudia eine echte Münze („Zahl/Wappen"). Welche Verteilung besitzt die Anzahl der dabei erzielten „Wappen"? (Bitte nicht rechnen!)

4.35 Aufgabe. In einer Urne befinden sich 10 rote, 20 blaue, 30 weiße und 40 schwarze (ansonsten gleichartige) Kugeln. Nach jeweils gutem Mischen werden rein zufällig 25 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Es sei R (bzw. B, W, S) die Anzahl gezogener roter (bzw. blauer, weißer, schwarzer) Kugeln. Man bestimme die Verteilungen der folgenden Zufallsvektoren:

(i) (R, B, W, S),

(ii) $(R + B, W, S)$,

(iii) $R + B + W$.

4.36 Aufgabe. In Kommunikationssystemen zur Übertragung digitaler Nachrichten werden die von der Informationsquelle erzeugten Nachrichten üblicherweise in eine Bitfolge umgewandelt, die an den Empfänger übertragen werden soll. Zur Unterdrückung der durch Rauschen und Überlagerung verursachten Störungen und zur Erhöhung der Zuverlässigkeit der Übertragung fügt man einer binären Quellfolge kontrolliert Redundanz hinzu. Letztere hilft dem Empfänger, Übertragungsfehler zu erkennen und eventuell sogar zu korrigieren. Wir machen im Folgenden die Annahme, dass jedes zu übertragende Bit unabhängig von anderen Bits mit derselben Wahrscheinlichkeit p in dem Sinne gestört wird, dass 0 in 1 und 1 in 0 umgewandelt wird. Die zu übertragenden Codewörter mögen jeweils aus k Bits bestehen.

(i) Es werden n Wörter übertragen. Welche Verteilung besitzt die Anzahl X der nicht (d.h. in keinem Bit) gestörten Wörter?

(ii) Zur Übertragung werden nur Codewörter verwendet, die die Eigenschaft besitzen, dass bis zu zwei Bitfehler pro Codewort korrigiert werden können. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit r, dass ein übertragenes Codewort korrekt auf Empfängerseite ankommt (evtl. nach Korrektur)? Welche Verteilung besitzt die Anzahl Y der richtig erkannten unter n übertragenen Codewörtern?