5 Übungsaufgaben zu Kapitel 5

5.1 Aufgabe. Man bestimme die Grenzwerte der nachstehenden Folgen:

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} && a_n := \frac{7\binom{n}{3}+5}{5n^3+2n^2-1},\\
&\text{(ii)} && b_n := (\frac{6n-2}{2n-5})^3,\\
&\text{(iii)} && c_n := n-\sqrt{n^2+5n},\\
&\text{(iv)} && d_n := \frac{(2^n-6)^2}{2\cdot 4^n+1},\\
&\text{(v)} && e_n := n(1-(1-\frac{1}{n})^{42}),\\
&\text{(vi)} && f_n := \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}.
\end{aligned}$$

5.2 Aufgabe. Man untersuche die angegebenen Folgen auf Konvergenz:

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} && a_n := \frac{3^{n-1}}{(n+1)^2}\ ,\\
&\text{(ii)} && b_n := \sqrt[n]{2^n+3^n+n}\ ,\\
&\text{(iii)} && c_n := \sqrt[n]{n+\sqrt[2n]{(2n)!}}\ ,\\
&\text{(iv)} && d_n := \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\left(\sqrt{1+\sqrt{1+n^4}}-n\right)\ .
\end{aligned}$$

5.3 Aufgabe. Gegeben seien die Folgen

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} k^{-2} \ \text{ und } \ b_n := a_n + \frac{1}{n}.$$

Weiter sei

$$J_n := [a_n, b_n].$$

(i) Man zeige: $J_n \subset J_{n+1}, n \in \mathbb{N}$.

(ii) $b_n - a_n \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$.

(iii) Wie groß ist n zu wählen, damit $b_n - a_n < 0.1$ ist?

(iv) Nach (i) und (ii) gibt es genau ein $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ (Prinzip der Intervallschachtelung). Man bestimme eine rationale Zahl $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \quad (p, q \in \mathbb{N})$, so dass gilt:

$$|x_0 - \frac{p}{q}| \leq 0.1.$$

5.4 Aufgabe. Gegeben seien die Folgen

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k+3}} - \frac{1}{\sqrt{k+4}} \right) ,$$

$$b_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} .$$

Man bestimme die Grenzwerte $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Man gebe zu beliebig vorgegebenem $\epsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ so an, dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|a_n - a| < \epsilon \text{ und } |b_n - b| < \epsilon .$$

Welches n_0 ergibt sich für $\epsilon = 0,001$?

5.5 Aufgabe. Die Teilfolgen $(a_{2i}), (a_{2i+1}), (a_{3i})$ der Folge (a_n) seien konvergent. Man beweise die Konvergenz von (a_n).

5.6 Aufgabe. Man bestimme von jeder der nachstehenden Folgen alle Häufungspunkte und den größten und kleinsten Häufungspunkt (falls existent). Für jeden Häufungspunkt ist eine Teilfolge der betreffenden Folge anzugeben, welche gegen den Häufungspunkt konvergiert. Welche der Folgen sind konvergent?

(i) $$a_n := (1 + (-1)^n) \left(\frac{n-2}{n} \right)^n .$$

(ii) $$b_n := \frac{(-1)^n + 4n}{(1-(-1)^n)^n + 7n^2} .$$

(iii) $$c_n = n - 4 \cdot \text{floor}(n/4).$$

5.7 Aufgabe. Es seien (a_n) eine Folge und $q \in (0,1)$ mit

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q \cdot |a_n - a_{n-1}|, \qquad n \geq 2.$$

Man zeige die Konvergenz von (a_n). (Hinweis: Konvergenzkriterium von Cauchy).

5.8 Aufgabe. Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(i) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \sqrt[n]{n},$$

(ii) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n+3}{7n^3-3n^2-2},$$

(iii) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^{n},$$

(iv) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n},$$

(v) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-(n^2)},$$

(vi) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^{n+1}},$$

(vii) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!(n+1)!}{(2n)!}3^n,$$

(viii) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n^4+3}}.$$

5.9 Aufgabe. Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz und auf absolute Konvergenz:

(i) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}+1},$$

(ii) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n^2}+\frac{1}{n}\right),$$

(iii) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}},$$

(iv) $$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \quad \text{mit} \quad d_n := \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{3n^2+2n}, & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ \frac{-\sqrt{n}}{n^3+2}, & \text{falls } n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

5.10 Aufgabe.

(i) Die Folge (a_n) sei monoton fallend, und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sei konvergent.

Man zeige: $\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0$.

(ii) Kann man in (i) auf die Monotonie der Folge (a_n) verzichten?

5.11 Aufgabe. Man berechne den Wert der folgenden Reihen:

$$\text{(i)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right),$$

$$\text{(ii)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^{n+k}}.$$

5.12 Aufgabe. Man bestimme den Wert der Summen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}.$$

Hinweis: Man bilde geeignete Cauchy-Produkte.

5.13 Aufgabe. Für $x \in (0,1)$ betrachte man die absolut konvergenten Reihen $\sum_{k=0}^{\infty}(1-x)^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$. Mittels des Cauchy-Produktes bestimme man Zahlen $d_n(x), n \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (1-x)^k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x) \; .$$

Man gebe $\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x)$ als gebrochen rationale Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ an. Lässt sich f in den Punkten $x_0 = 0$ bzw. $x_1 = 1$ stetig ergänzen?

5.14 Aufgabe. Gegeben sei eine monoton wachsende Abbildung $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ mit $g(1) = e^c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und

$$g(s+t) = g(t) \cdot g(s), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Man zeige $g(x) = e^{cx}$ für $x \in \mathbb{R}$.

5.15 Aufgabe.

(i) Es seien für $n \in \mathbb{N}_0$

$$n^{\underline{0}} := 1 \; ,$$
$$n^{\underline{k}} := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1), \; k \in \mathbb{N},$$

definiert. Man zeige die Gleichung

$$\sum_{n=0}^{j-1} n^{\underline{k-1}} = \frac{j^{\underline{k}}}{k}$$

für $k \in \mathbb{N}$ und $j \in \mathbb{N}$.

(ii) Es sei X eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable mit $\mathbb{E}X^k < \infty$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Man zeige:

$$\mathbb{E}X^{\underline{k}} = k \sum_{n=0}^{\infty} n^{\underline{k-1}} \cdot \mathbb{P}(X > n).$$

5.16 Aufgabe. Gegeben seien unabhängige mit den Parametern $p, q \in (0,1)$ geometrisch verteilte Zufallsvariablen X und Y.

(i) Man bestimme die Verteilung von

$$Z := \min(X, Y).$$

(ii) Die Zufallsvariable W sei durch

$$W := \begin{cases} -1, & \text{falls } X < Y, \\ 0, & \text{falls } X = Y, \\ 1, & \text{falls } X > Y, \end{cases}$$

gegeben. Man bestimme die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(W = j | Z = i), \quad j \in \{-1, 0, 1\}, \quad i \in \mathbb{N}_0 \, .$$