7 Übungsaufgaben zu Kapitel 7

7.1 Aufgabe. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Man zeige, dass f genau dann über $[a,b]$ Riemann-integrierbar ist, wenn f für alle $\delta > 0$ mit $\delta < b-a$ über $[a+\delta, b]$ Riemann-integrierbar ist. Man zeige ferner, dass dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0+} \int_{a+\delta}^b f(x)\,dx.$$

7.2 Aufgabe. Man betrachte die durch $f(x) := 3^x$ definierte Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sowie die durch die Punkte $x_k = \frac{k}{n}$ ($k = 0,1,\ldots,n$, $n \in \mathbb{N}$) gegebene Zerlegung Z_n von $[0,1]$.

(i) Man berechne die Untersumme $U(f;Z_n)$ und die Obersumme $O(f,Z_n)$.

(ii) Man zeige

$$\lim_{n\to\infty} U(f;Z_n) = \lim_{n\to\infty} O(f;Z_n) = S$$

und bestimme den Grenzwert S.

7.3 Aufgabe. Man berechne die folgenden Grenzwerte:

(i) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3},$$

(ii) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2},$$

(iii) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{n-k}{n^2+nk}.$$

Hinweis: Man stelle die Summen als geeignete Obersummen und Untersummen dar.

7.4 Aufgabe. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x) := \begin{cases} -x, & \text{für } x \le -1, \\ x^2+1, & \text{für } x \in (-1,1), \\ \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{für } x \ge 1, \end{cases}$$

gegeben. Man berechne $F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

7.5 Aufgabe. Man bestimme die Ableitungen der folgenden Funktionen in allen Punkten, in denen diese Ableitungen existieren.

$$\text{(i)} \quad F(x) := \int\limits_0^{(\sin x)^2} e^{-t^2}\, dt,$$

$$\text{(ii)} \quad G(x) := \int\limits_{x^2}^{e^x} \arctan(e^{-t})\, dt,$$

$$\text{(iii)} \quad H(x) := \int\limits_{-|x|}^{|x|} t^2 \cos t\, dt.$$

7.6 Aufgabe. Warum gelten die Ungleichungen

$$\frac{1}{2} \leq \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2 + x^3}} \leq \frac{\pi}{6} \;?$$

7.7 Aufgabe. Man berechne die folgenden Integrale:

$$\text{(i)} \quad \int_0^{1/4} \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}\, dx,$$

$$\text{(ii)} \quad \int_0^1 (4x^4 + 3x^3 + 1)\, dx,$$

$$\text{(iii)} \quad \int_0^\pi (\cos(x) - \sin(x))^2\, dx,$$

$$\text{(iv)} \quad \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{x + 1}\, dx.$$

7.8 Aufgabe. Man berechne die folgenden Integrale:

$$\text{(i)} \quad \int\limits_{-1}^{4} |x^2 - 2x|\, dx,$$

$$\text{(ii)} \quad \int\limits_{-1}^{1} \frac{\sin x \cdot \cos x}{1 + \sin^2 x}\, dx,$$

$$\text{(iii)} \quad \int\limits_{-1}^{1} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{5^n}\, x^n \Big)\, dx.$$

7.9 Aufgabe. Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) := (\cos x)^2$ definiert. Für $x \in (0,1]$ sei die Funktion $G(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$ definiert.

(i) Man zeige, dass für alle $x \in (0,1]$ gilt: $f(x) \leq G(x)$.

(ii) Man zeige, dass G auf $(0,1]$ monoton fällt.

(iii) Man berechne $\lim\limits_{x\to 0+} G(x)$.

(iv) Man berechne $\lim\limits_{x\to 0+} G'(x)$.

(v) Man zeige: $G(1) \leq \sin(1)$.

7.10 Aufgabe. Man untersuche, ob folgende uneigentliche Integrale existieren:

(i) $$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,dx,$$

(ii) $$\int_0^\infty \frac{x}{x^5+1}\,dx,$$

(iii) $$\int_0^\infty \cos(x)\,dx.$$

7.11 Aufgabe. Es sei $\alpha \geq 1$. Man untersuche mittels des Integralkriteriums folgende Reihe auf Konvergenz:

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\log(n))^\alpha}.$$

7.12 Aufgabe. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Man untersuche folgendes uneigentliches Integral auf Konvergenz:

$$\int_1^\infty x^k 2^{-x}\,dx.$$

7.13 Aufgabe. Man berechne zu folgenden Funktionen jeweils eine Stammfunktion:

(i)

$$f_1 : \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right).$$

Hinweis: Man substituiere $y = x+1$ und verwende partielle Integration.

(ii)

$$f_2 : (-1,1) \to \mathbb{R}, \qquad x \to \frac{1}{\cos(x)}.$$

Hinweis: Man substituiere $y = \sin(x)$.

7.14 Aufgabe. Man berechne durch Substitution bzw. durch partielle Integration folgende unbestimmte Integrale:

$$\text{(i)} \quad \int x^2 \cos(x^3)\, dx,$$
$$\text{(ii)} \quad \int (\cos 2x)\sqrt{4 - \sin 2x}\, dx,$$
$$\text{(iii)} \quad \int 2x \cos(x^2) \cdot \sin(x^2)\, dx,$$
$$\text{(iv)} \quad \int \frac{2x\ dx}{\sqrt{1 - (x-1)^2}} \quad \text{für } |x-1| < 1.$$

7.15 Aufgabe. Welche der folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren?

$$\text{(i)} \quad I_1 = \int_1^\infty \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x} + \ln x},$$
$$\text{(ii)} \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x} + x^2}\, dx,$$
$$\text{(iii)} \quad I_3 = \int_0^1 \frac{dx}{\arctan x},$$
$$\text{(iv)} \quad I_4 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\sinh x}}.$$

7.16 Aufgabe. Man prüfe, ob die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)$$

konvergiert. Hinweis: Man verwende das Integralkriterium.

7.17 Aufgabe. Man untersuche für $\alpha \geq 1$ die Reihe

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n) \cdot [\ln(\ln n)]^\alpha}$$

auf Konvergenz. Hinweis: Für $\alpha > 1$ betrachte man die Ableitung der Funktion $F_\alpha(x) := [\ln(\ln x)]^{1-\alpha}$, $x > 3$, und für $\alpha = 1$ betrachte man die Ableitung der Funktion $F_1(x) := \ln(\ln(\ln x))$, $x > 3$.

7.18 Aufgabe. Es sei $I := (-2, 2)$ und $f : I \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar auf I. Man zeige, dass für $x \in (-2, 2)$ und $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ für das n-te Restglied $R_n(x; f; 0) = f(x) - T_n(x; f; 0)$ die folgende Formel von Cauchy gilt:

$$R_n(x; f; 0) = \frac{1}{n!} \cdot \int_0^x (x - t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Hinweis: Beweis durch vollständige Induktion nach n; hierbei benutze man partielle Integration.