8 Übungsaufgaben zu Kapitel 8

8.1 Aufgabe. Man bestimme die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

(i)

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & -2x_2 & -6x_3 & = & -1, \\ -2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & = & 0, \\ x_1 & -2x_2 & -3x_3 & = & 0. \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{rrrrcr} & x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & 1, \\ 2x_1 & & +x_3 & +x_4 & = & 1, \\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & & = & 2. \end{array}$$

(iii)

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +3x_2 & = & 3, \\ 17x_1 & +9x_2 & = & 51, \\ -x_1 & +x_2 & = & 1. \end{array}$$

8.2 Aufgabe. Für jede Wahl von $a, b \in \mathbb{R}$ bilden die drei Gleichungen

$$\begin{array}{rrrcr} ax_1 & & +bx_3 & = & 2, \\ ax_1 & +ax_2 & +4x_3 & = & 4, \\ & ax_2 & +2x_3 & = & b \end{array}$$

ein linearesGleichungssystem. Für welche a und b hat das System eine eindeutige, eine einparametrige, eine zweiparametrige bzw. keine Lösung?

8.3 Aufgabe. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des $\mathbb{R}^4$?

(i) $M_1 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = 0$ und $x_3 = 0\}$.

(ii) $M_2 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = 0$ oder $x_3 = 0\}$.

(iii) $M_3 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = 0$ und $3x_3 + 4x_4 = 0\}$.

(iv) $M_4 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 3x_3 + 4x_4 = 7\}$.

8.4 Aufgabe. Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a}_1 := (1, 2, 0), \quad \vec{a}_2 := (2, 11, 3), \quad \vec{a}_3 := (0, 3, 1), \quad \vec{a}_4 := (4, 1, -3).$$

Man gebe alle Möglichkeiten an, aus $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\}$ drei linear unabhängige Vektoren auszuwählen.

8.5 Aufgabe. Im $\mathbb{R}^4$ seien die Vektoren

$$\vec{a}_1 := (1,3,2,3), \quad \vec{a}_2 := (1,1,0,1), \quad \vec{a}_3 := (1,2,1,2),$$
$$\vec{a}_4 := (0,1,1,1), \quad \vec{a}_5 := (1,0,1,-1)$$

gegeben. Es sei $U := \mathrm{Span}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_4)$.

(i) Man berechne eine Basis von U und bestimme die Dimension von U.

(ii) Liegt $\vec{a}_5$ in U?

8.6 Aufgabe. Gegeben sei eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit den Eigenschaften

$$f(\vec{a}_1) = \vec{b}_1, \quad f(\vec{a}_2) = \vec{b}_2, \quad f(\vec{a}_3) = \vec{b}_3,$$

wobei

$$\vec{a}_1 := (1,2,3), \qquad \vec{a}_2 := (1,1,0), \qquad \vec{a}_3 := (0,1,2),$$
$$\vec{b}_1 := (1,1), \qquad \vec{b}_2 := (1,2), \qquad \vec{b}_3 := (2,0).$$

(i) Ist f durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt?

(ii) Man berechne $f((1,2,4))$.

8.7 Aufgabe. Gegeben sei eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$. Man zeige, dass ein Vektor $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ existiert mit

$$f(t) = t \cdot \vec{x}_0, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

8.8 Aufgabe. Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + 4x_2).$$

(i) Man bestimme die kanonische Matrix zu f.

(ii) Man bestimmen die Darstellung von f bezüglich der Basis $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ des $\mathbb{R}^3$ und der Basis $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ des $\mathbb{R}^2$, wobei

$$\vec{a}_1 := (1,1,1), \qquad \vec{a}_2 := (1,1,0), \quad \vec{a}_3 := (1,0,0),$$
$$\vec{b}_1 := (1,1), \qquad \vec{b}_2 := (1,0).$$

8.9 Aufgabe. Es seien U, V Unterräume des $\mathbb{R}^n$ sowie $f : U \to V$ eine lineare und bijektive Abbildung. Man zeige, dass auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : V \to U$ linear ist (vgl. Satz 8.27).

8.10 Aufgabe. Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch die Darstellung

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ des $\mathbb{R}^3$ und der Basis $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ des $\mathbb{R}^2$, wobei

$$\begin{aligned} &\vec{a}_1 := (1,1,1), \qquad &&\vec{a}_2 := (0,1,1), \quad &&\vec{a}_3 := (0,0,1), \\ &\vec{b}_1 := (1,1), &&\vec{b}_2 := (0,1). \end{aligned}$$

Man bestimme $\mathrm{Bild}(f)$, $\mathrm{Rang}(f)$, $\mathrm{Kern}(f)$ und $\dim \mathrm{Kern}(f)$.

8.11 Aufgabe. Gegeben sei ein Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Man beweise die Gleichung

$$\|\vec{x}\| = \max\{\langle \vec{v}, \vec{x} \rangle : \vec{v} \in \mathbb{R}^n,\ \|\vec{v}\| = 1\}.$$

8.12 Aufgabe. Man beweise die für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ gültige *Polarisationsformel*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{1}{4}\Big(\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2\Big).$$

8.13 Aufgabe. Betrachtet werden die Vektoren

$$\vec{b}_1 := (0,1,1), \quad \vec{b}_2 := (1,0,1), \quad \vec{b}_3 := (5,-2,2).$$

(i) Man zeige, dass $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

(ii) Man bestimme den Winkel φ zwischen $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$.

8.14 Aufgabe. Gegeben sei der Vektor

$$\vec{a}_1 := \frac{1}{2}(1,1,1,1) \in \mathbb{R}^4.$$

Man bestimme Vektoren $\vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$, so dass $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$ ist.

8.15 Aufgabe. Gegeben sei der Unterraum $U := \mathrm{Span}(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ des $\mathbb{R}^4$ mit

$$\vec{c}_1 := \frac{1}{2}(1,1,1,1), \quad \vec{c}_2 := (1,0,1,2), \qquad \vec{c}_3 := (0,1,-1,1).$$

Man bestimme eine Orthonormalbasis $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ von U mit

$$\mathrm{Span}(\vec{b}_1, \vec{b}_2) = \mathrm{Span}(\vec{c}_1, \vec{c}_2).$$

8.16 Aufgabe. Für jede Wahl von $a, b \in \mathbb{R}$ bilden die drei Gleichungen

$$\begin{array}{cccccc} ax_1 & & +bx_3 & = & 2, \\ ax_1 & +ax_2 & +4x_3 & = & 4, \\ & ax_2 & +2x_3 & = & b \end{array}$$

ein lineares Gleichungssystem. Man bestimme die Ränge der dazugehörigen Koeffizientenmatrix und erweiterten Koeffizientenmatrix und stelle die jeweiligen Lösungen dar als Summe einer speziellen Lösung und einer Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems, sofern möglich.

8.17 Aufgabe. Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ gelte

$$\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle, \qquad \vec{z} \in \mathbb{R}^n.$$

Man zeige $\vec{x} = \vec{y}$.

8.18 Aufgabe. Man betrachte die Unterräume

$$\begin{aligned} U &:= \mathrm{Span}((1,3,5,1,0),(1,2,-1,1,0)), \\ V &:= \mathrm{Span}((0,1,3,0,0),(0,1,4,0,0)) \end{aligned}$$

des $\mathbb{R}^5$. Man bestimme Basen von $U + V$ und von $U \cap V$.

8.19 Aufgabe. Man betrachte die Vektoren

$$\begin{aligned} \vec{a}_0 &:= (1,1,1,-1,1), \\ \vec{a}_1 &:= (1,1,0,0,1), \\ \vec{a}_2 &:= (2,2,-1,-1,1), \\ \vec{a}_3 &:= (0,0,2,0,1), \\ \vec{a}_4 &:= (0,0,1,-1,0) \end{aligned}$$

sowie die affinen Unterräume

$$\begin{aligned} M_2 &:= \vec{a}_0 + \mathrm{Span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2), \\ M_3 &:= \vec{a}_0 + \mathrm{Span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3), \\ M_4 &:= \vec{a}_0 + \mathrm{Span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4) \end{aligned}$$

des $\mathbb{R}^5$.

(i) Man bestimme die Dimensionen von M_2, M_3 und M_4.

(ii) Man untersuche, welche der affinen Unterräume lineare Unterräume sind.

8.20 Aufgabe. Man berechne den Abstand der Geraden

$$G := \{(3, 2, 0) + \lambda \cdot (5, -2, 2) : \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

vom Nullpunkt $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

8.21 Aufgabe. Gegeben sei die Hyperebene $H = \vec{x}_0 + U$ des $\mathbb{R}^3$ mit $U := \operatorname{Span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ und

$$\vec{x}_0 := (0, 0, 1), \quad \vec{a}_1 := (1, 1, 2), \quad \vec{a}_2 := (1, 2, 0).$$

Ferner sei $\vec{y}_0 := (-1, 4, 0)$ gegeben.

(i) Man bestimme die Hessesche Normalform von H.

(ii) Man bestimme die Abstände $d(\vec{0}, H)$ und $d(\vec{y}_0, H)$.

8.22 Aufgabe. Gegeben seien die Unterräume

$$U := \operatorname{Span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3), \qquad V := \operatorname{Span}(\vec{a}_4, \vec{a}_5)$$

des $\mathbb{R}^5$ mit

$$\begin{aligned} &\vec{a}_1 := (1, 2, 1, 3, 1), \quad \vec{a}_2 := (1, 1, 0, 0, 1), \qquad \vec{a}_3 := (-1, 0, 1, 3, -1), \\ &\vec{a}_4 := (0, 0, 0, 1, 0), \quad \vec{a}_5 := (2, 3, 1, -1, 2). \end{aligned}$$

(i) Man berechne eine Basis von $U + V$ und bestimmen die Dimension von $U + V$.

(ii) Man bestimme die orthogonale Projektion $P_{(U+V)^\perp}$ auf $(U + V)^\perp$.

(iii) Man bestimme den Abstand der affinen Unterräume $\vec{x}_0 + U$ und $\vec{y}_0 + V$, wobei

$$\vec{x}_0 := (1, 0, 0, 0, 1), \qquad \vec{y}_0 := (1, 5, -4, 2, -1).$$

8.23 Aufgabe. Gegeben sei die von $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängende Matrix

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 10 & 13 \\ 2 & 6 & 11 & 14 \\ 3 & 7 & 10 & 15 \\ 4 & 8 & 9 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(i) Man bestimme den Rang von A_α in Abhängigkeit von α.

(ii) Zu welchen $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt es eine 4×4-Matrix B_α mit $A_\alpha \cdot B_\alpha = E_4$?

8.24 Aufgabe. Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man berechne das Matrixprodukt $A^T \cdot B^{-1}$.

8.25 Aufgabe. Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Man bestimme für jedes $n \in \mathbb{N}$ das n-fache Matrixprodukt

$$A^n := \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n-\text{mal}}.$$

(ii) Man zeige, dass die Matrix $E_4 - A$ regulär ist und beweise die Formel

$$(E_4 - A)^{-1} = E_4 + A + A^2 + A^3.$$

8.26 Aufgabe. Gegeben sei eine $n \times n$-Matrix A, so dass $E_n - A$ regulär ist. Man beweise die Gleichung

$$(E_n - A)^{-1} \cdot (E_n - A^n) = E_n + A + A^2 + \ldots + A^{n-1}.$$