6 Übungsaufgaben zu Kapitel 6

6.1 Aufgabe. Die Funktion $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ sei durch $f(0) = 0$ und

$$f(x) = x \cdot \operatorname{floor}\left(\frac{1}{x}\right), \qquad x \neq 0,$$

definiert. Man bestimme alle Punkte, in denen f stetig ist.

6.2 Aufgabe. Es seien $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Man zeige:

(i) Gilt $f(x) \in [a, b]$ für alle $x \in [a, b]$, so existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$.

(ii) Gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$, so existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $1/f(x) \leq 1/f(x_0)$, $x \in [a, b]$.

Hinweis zu (i): Man betrachte die Funktion $g(x) := f(x) - x$, $x \in [a, b]$.

6.3 Aufgabe. Die Funktion $f : [0, 1] \to [0, 1]$ sei durch

$$f(x) := \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{falls } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ x - \frac{1}{2} & \text{falls } x \in [\frac{1}{2}, 1), \\ 1 & \text{falls } x = 1, \end{cases}$$

definiert. An welchen Stellen sind f und $f^2 = f \circ f$ stetig?

6.4 Aufgabe. Wie lauten die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen?

(i) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{2} x^n,$$

(ii) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \right) x^n,$$

(iii) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2} x^{2n},$$

(iv) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) x^n.$$

6.5 Aufgabe. Man bestimme jeweils den Konvergenzradius und den Konvergenzbereich der folgenden Potenzreihen:

(i) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(3x)^n}{\binom{n}{2}},$$

(ii) $$\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2}(x-b)^n, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

(iii) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n)}.$$

Hinweis: Man benutze die Ungleichung $\ln(n) \leq n$, $n \in \mathbb{N}$.

6.6 Aufgabe. Man gebe zu den folgenden Reihen jeweils den Konvergenzradius sowie den Konvergenzbereich an:

(i) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n \cdot 2^n} \cdot x^n,$$

(ii) $$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot x^n \text{ mit } b_n := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ 5^{\frac{n}{2}}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \end{cases}$$

(iii) $$\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{-n^2} \cdot x^n.$$

6.7 Aufgabe. Man zeige durch Rechnen mit Potenzreihen, dass

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^3} = -\frac{1}{3},$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)(\sin x)^2}{1 - \cos x} = 2.$$

6.8 Aufgabe. Man bestimme die folgenden Grenzwerte:

(i) $$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)^2}{2^x},$$

(ii) $$\lim_{x \to 0+} x\ln(1/x),$$

(iii) $$\lim_{x \to 1-} \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k,$$

(iv) $$\lim_{x \to \infty} (\ln(x+2) - \ln(2x)).$$

6.9 Aufgabe. Man untersuche die nachstehenden Funktionenfolgen (f_n) auf punktweise Konvergenz und gleichmäßige Konvergenz:

(i) $\quad f_n(x) = \min\{n, x^{-1}\},\ x > 0,$

(ii) $\quad f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2},\ x \geq 0,$

(iii) $\quad f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2},\ x \geq q,$ mit $q > 0$.

6.10 Aufgabe. Man bestimme die Ableitung der folgenden Funktion f in den Punkten, in denen die Ableitung existiert. Insbesondere ist zu untersuchen, ob $f'(0)$ existiert.

$$f(x) = \begin{cases} 10x + x^3 \cdot \sin\frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

6.11 Aufgabe. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{falls } x < 0, \\ e^x, & \text{falls } x \in [0,1], \\ e, & \text{falls } x > 1, \end{cases}$$

definiert. An welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ ist f differenzierbar, und wie lautet $f'(x)$ für diese x?

6.12 Aufgabe. Wie lauten die folgenden Grenzwerte (sofern diese existieren)?

(i) $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos x + e^x + e^{-x} - 4}{x^4},$

(ii) $\quad \lim\limits_{x\to 0} ((\sin x)/x)^{3/x^2},$

(iii) $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^4)(\cos x - 1)^2}{x^8},$

(iv) $\quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$

6.13 Aufgabe. Es seien $a > 0$, $\beta \neq 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Man berechne die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Mittelwertsätze:

(i) $\quad \lim\limits_{n\to\infty} n(1 - \cos(1/n)),$

(ii) $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^2 + a^2} - \sqrt[3]{n^2},$

(iii) $\quad \lim\limits_{x\to a} (x^\alpha - a^\alpha)/(x^\beta - a^\beta).$

6.14 Aufgabe. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x-1}{x} & \text{für } x \leq -1, \\ 2(x+2)^2 & \text{für } |x| < 1, \\ \frac{5}{x^2+4} & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

(i) Man bestimme $\lim_{x\to a+} f(x)$ und $\lim_{x\to a-} f(x)$ für $a \in \{-1, 1\}$ sowie $\lim_{x\to b} f(x)$ für $b \in \{-\infty, \infty\}$.

(ii) In welchen Punkten ist f stetig?

(iii) In welchen der Intervalle $(-\infty, -1], (-1, 1)$ und $[1, \infty)$ ist f (streng) monoton?

(iv) Man bestimme $f(\mathbb{R})$.

6.15 Aufgabe. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x) = (\cos(x) \cdot \sin(x)) \cdot e^x$$

definiert. Man bestimme alle $x \in [-\pi, \pi]$, in denen f ein lokales oder globales Minimum oder Maximum besitzt.

6.16 Aufgabe. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x) := e^{x^2-2|x|+2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

definiert.

(i) Ist f stetig auf $\mathbb{R}$?

(ii) Man bestimme alle Punkte $x \in \mathbb{R}$, in denen f differenzierbar ist und berechne dort die Ableitung.

(iii) Man bestimme alle lokalen Maxima und Minima von f.

6.17 Aufgabe. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x) := e^x \cdot (x^2 - 4 \cdot x + 1) - 2\arctan(3)$$

definiert.

(i) Wie lauten die erste und die zweite Ableitung von f?

(ii) Man bestimme alle lokalen Extremalstellen von f.

(iii) Man bestimme alle Wendepunkte von f.

(iv) Man bestimme das Taylorpolynom zweiter Ordnung

$$T_2(x; f, x_0) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0)^2$$

zum Entwicklungspunkt $x_0 := -1$.

6.18 Aufgabe. Man berechne das Taylorpolynom vierter Ordnung $T_4(x; f; 0)$ der durch

$$f(x) = \sin(x)e^x, \; x \in \mathbb{R},$$

definierten Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Man gebe ferner für $|x| \leq 1$ eine Abschätzung an für

$$|f(x) - T_4(x; f; 0)|.$$

6.19 Aufgabe. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Man zeige

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

für alle $n \geq 2$, $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in (0, 1)$ mit $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.

6.20 Aufgabe. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine umkehrbare, zweimal differenzierbare, konvexe Abbildung mit

$$f'(x) > 0, \qquad x \in [a, b]. \qquad (*)$$

Man zeige, dass die Umkehrabbildung f^{-1} konkav ist. Kann auf die Bedingung $(*)$ verzichtet werden?

6.21 Aufgabe. Man untersuche die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = xe^{-1/x^2}, \; x \neq 0, \qquad f(0) = 0,$$

auf Stetigkeit, Monotonie, Extrema, Konvexität, Konkavität und Wendepunkte.