1 Übungsaufgaben zu Kapitel 1

1.1 Übungsaufgaben zu Abschnitt 1.1

1.1.1 Aufgabe.

Untersuchen Sie die nachstehend definierten Folgen $(\vec{a}_k)_{k\geq 1}$ und $(\vec{b}_k)_{k\geq 1}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den jeweiligen Grenzwert:

a)
$$\vec{a}_k := \left(\frac{1}{k^2} + \frac{2}{k^2} + \ldots + \frac{k}{k^2}, \sqrt{k^2+3k} - k\right),$$

b)
$$\vec{b}_k := \left(\prod_{r=2}^{k}\left(1+\frac{1}{r}\right), k^2(\sqrt[3]{k^3+1} - k)\right).$$

1.1.2 Aufgabe.

Sei $(\vec{a}_k)_{k\geq 1}$ eine konvergente Folge von Vektoren des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass dann auch die arithmetischen Mittel

$$\vec{b}_k \ := \ \frac{1}{k} \cdot (\vec{a}_1 + \ldots + \vec{a}_k)$$

gegen den Grenzwert $\lim_{k\to\infty} \vec{a}_k = \vec{a}$ konvergieren.

1.1.3 Aufgabe.

Zeigen Sie die folgenden Ungleichungen für Vektoren im $\mathbb{R}^n$:

a) $\frac{1}{n} \cdot ||\vec{x}||_1 \ \leq \ ||\vec{x}||_\infty \ \leq \ ||\vec{x}||_1,$

b) $||\vec{x}||_\infty \ \leq \ ||\vec{x}||_2 \ \leq \ \sqrt{n} \cdot ||\vec{x}||_\infty.$

1.1.4 Aufgabe.

Zeigen Sie, dass durch

$$||\vec{x}||_\infty \ := \ \max\{|x_j| : j = 1, \ldots, n\}, \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert ist.

1.1.5 Aufgabe.

Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $\vec{x} \mapsto f(\vec{x})$, eine lineare Abbildung vom $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^p$. Weiter sei $||\cdot||_{\mathbb{R}^p}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^p$.

Zeigen Sie: Definiert man für $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$$||\vec{x}||_{\mathbb{R}^n} \ := \ ||f(\vec{x})||_{\mathbb{R}^p},$$

so ist $||\cdot||_{\mathbb{R}^n}$ genau dann eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, wenn f injektiv ist.

1.2 Übungsaufgaben zu Abschnitt 1.2

1.2.1 Aufgabe.

Zeigen Sie:

a) Die Vereinigung beliebig vieler offener Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ist wieder offen.

b) Der Durchschnitt endlich vieler abgeschlossener Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ist wieder abgeschlossen.

c) Die Aussage in b) wird falsch, wenn das Wort „endlich“ durch „beliebig“ ersetzt wird.

1.2.2 Aufgabe.

Es seien $a,\ b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ abgeschlossen sind:

a) $M_1 \ := \ \{(a,b)\}$,

b) $M_2 \ := \ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = a \cdot x + b\}$,

c) $M_3 \ := \ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y = a\}$.

1.3 Übungsaufgaben zu Abschnitt 1.3

1.3.1 Aufgabe.

Es seien m, n und k natürliche Zahlen, $D \subset \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^m$ und $f : D \to \mathbb{R}^m$, $g : E \to \mathbb{R}^k$ Funktionen mit $f(D) \subset E$.

Zeigen Sie: Sind f und g stetig, so ist auch die Komposition $g \circ f : D \to \mathbb{R}^k$, $\vec{x} \mapsto g \circ f(\vec{x}) := g(f(\vec{x}))$, eine stetige Funktion.

1.3.2 Aufgabe. Konvergieren die Funktionswerte $f(x, y)$ der durch

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$$

definierten Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ für $(x, y) \to (0, 0)$? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

1.3.3 Aufgabe.

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit:

a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f_1(x, y) \;:=\; \begin{cases} \frac{(x-y^2)^2}{(x-1)^2+(y-1)^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (1, 1) \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (1, 1) \end{cases}$$

b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f_2(x, y) \;:=\; \begin{cases} \frac{(x-1)^2 \cdot (\cos(y)-1)}{(x-1)^2+y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (1, 0) \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (1, 0) \end{cases}$$

c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f_3(x, y) \;:=\; \begin{cases} \frac{(x-2y-4) \cdot x}{2+xy}, & \text{falls } xy \neq -2 \\ -2, & \text{falls } xy = -2 \end{cases}$$

1.3.4 Aufgabe.

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit:

a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f_1(x,y) \quad := \quad \begin{cases} \frac{y}{y-x}, & \text{falls } x \neq y; \\ 0, & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f_2(x,y) \quad := \quad \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f_3(x,y) \quad := \quad \begin{cases} (3y+2, 2x), & \text{falls } (x,y) \neq (0,0); \\ (2,0), & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

d) $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f_4(x,y,z) \quad := \quad \begin{cases} \frac{x^2+y^2+x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (x,y) \neq (0,0); \\ 1, & \text{falls } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (x,y) = (0,0. \end{cases}$$

1.3.5 Aufgabe.

Welche der folgenden Matrizen ist positiv (semi)definit, indefinit, negativ (semi)definit?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.4 Übungsaufgaben zu Abschnitt 1.4

1.4.1 Aufgabe.

Vorgegeben sei die Abbildung

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto f(x,y)\ :=\ e^{x^2-1}\cdot(-2+x^2+y^2).$$

a) Zeigen Sie, dass f (total) differenzierbar ist.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen der Funktion f im Punkt $(2,0)$.

c) Bestimmen Sie für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}(x,y)=\partial_{\vec{v}}f(x,y)$ von f in Richtung des Vektors $\vec{v}:=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$.

d) Bestimmen Sie im Punkt $(x_0,y_0):=(1,2)$ die "Richtung des steilsten Anstiegs" von f, d.h. bestimmen Sie diejenige Richtung $\vec{v}_0\in\mathbb{R}^2,\ \|\vec{v}_0\|_2=1$, für die gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{v}_0}(1,2)\ =\ \partial_{\vec{v}_0}f(1,2)\ =\ \max\left\{\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}(1,2):\ \vec{v}\in\mathbb{R}^2,\ \|\vec{v}\|_2=1\right\}.$$

1.4.2 Aufgabe.

Vorgegeben sei die Abbildung

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto f(x,y)\ :=\ e^{x}\cdot(x^2+y^2-2\cdot x).$$

a) Bestimmen Sie im Punkt $(x_0,y_0)=(1,2)$ die Richtungsableitung von f in Richtung des Vektors $\vec{v}_0:=(0,-1)$.

a) Bestimmen Sie im Punkt $(x_0,y_0):=(1,2)$ die "Richtung des steilsten Anstiegs" von f, d.h. bestimmen Sie diejenige Richtung $\vec{v}_1\in\mathbb{R}^2,\ \|\vec{v}_1\|_2=1$, für die gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{v}_1}(1,2)\ =\ \partial_{\vec{v}_1}(1,2)\ =\ \max\left\{\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}(1,2)\ \middle|\ \vec{v}\in\mathbb{R}^2,\ \|\vec{v}\|_2=1\right\}.$$

1.4.3 Aufgabe.

Vorgegeben sei die Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto f(x,y)\ :=\ x\sin(|x|+|y|).$$

a) Ist die Funktion f im Punkt $(1,0)$ partiell nach y differenzierbar? Falls ja, geben Sie den Wert der partiellen Ableitung in diesem Punkt an.

b) Zeigen Sie, dass f im Punkt $(0,0)$ (total) differenzierbar ist und geben Sie den Gradienten der Funktion in diesem Punkt an.

1.5 Übungsaufgaben zu Abschnitt 1.5

1.5.1 Aufgabe.

Bestimmen Sie die Taylorpolynome $T_1(\vec{x}; f; \vec{a})$ und $T_2(\vec{x}; f; \vec{a})$ zum Entwicklungspunkt $\vec{a} = (2,0)$ der Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y) \ := \ e^{x^2-1} \cdot (-2 + x^2 + y^2).$$

1.6 Übungsaufgaben zu Abschnitt 1.6

1.6.1 Aufgabe.

Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y) \ := \ e^{x} \cdot (x^2 + y^2 - 2 \cdot x)$$

auf lokale Extrema (vgl. Aufgabe 1.4.2).

1.6.2 Aufgabe.

Vorgegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y) \ := \ x \cdot y \cdot e^{x \cdot y} + (1-x)^2.$$

a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f.

b) Untersuchen Sie die Funktion f in den stationären Punkten und geben Sie jeweils an, ob ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

c) Bestimmen Sie die Taylorpolynome $T_1(\vec{x}, f, \vec{a})$ und $T_2(\vec{x}, f, \vec{a})$ zum Entwicklungspunkt $\vec{a} = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

1.6.3 Aufgabe.

Vorgegeben sei die Funktion

$$f : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y)\ :=\ \cos(x^2 + y^2 - 1).$$

a) Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ an den Graphen von f?

b) Bestimmen Sie die stationären Punkte von f im offenen Quadrat $(-1,1) \times (-1,1)$.

c) Geben Sie alle lokalen und globalen Extremstellen der Funktion f auf dem gesamten Definitionsbereich $[-1,1] \times [-1,1]$ an.

d) Welches der folgenden sechs Bilder stellt den Graphen von f dar?

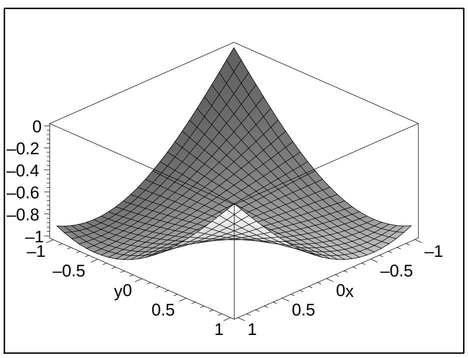

Bild 1

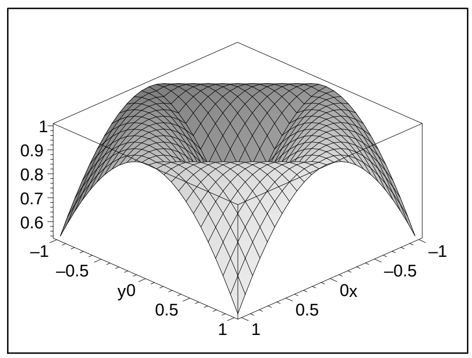

Bild 2

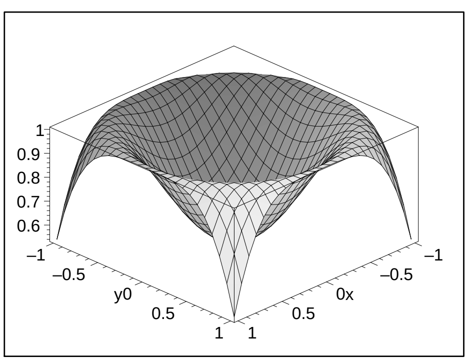

Bild 3

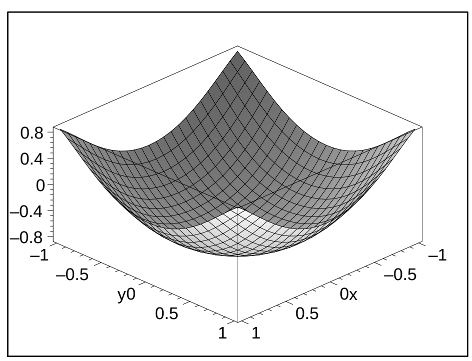

Bild 4

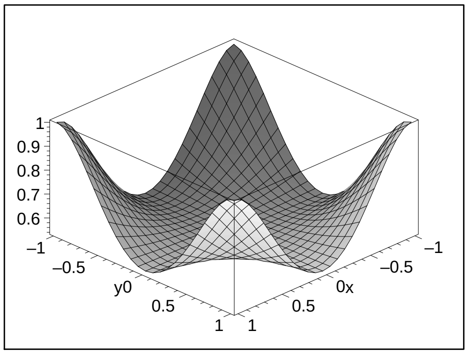

Bild 5

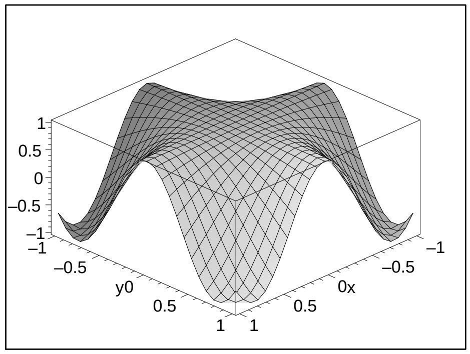

Bild 6

1.7 Übungsaufgaben zu Abschnitt 1.7

1.7.1 Aufgabe.

Gegeben seien die Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (r, \vartheta, \varphi) \mapsto f(r, \vartheta, \varphi)\ :=\ (r \sin\vartheta \cos\varphi, r \sin\vartheta \sin\varphi, r \cos\vartheta).$$

und

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (y_1, y_2, y_3) \mapsto g(y_1, y_2, y_3)\ :=\ \left(\frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2\right).$$

1. Bestimmen Sie die jeweiligen Jacobi-Matrizen $J_f(r, \vartheta, \varphi)$ und $J_g(y_1, y_2, y_3)$ der Abbildungen f und g.
2. Berechnen Sie mit Hilfe der allgemeinen Kettenregel die Ableitung der Komposition (Hintereinanderausführung)

   $$g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (r, \vartheta, \varphi) \mapsto (g \circ f)(r, \vartheta, \varphi) = g(f(r, \vartheta, \varphi))$$

   der Funktionen g und f.

1.8 Übungsaufgaben zu Abschnitt 1.8

1.8.1 Aufgabe.

Vorgegeben sei die Funktion

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto g(x,y,z)\ :=\ x + y + 2z - \cos(x + y + z - 1).$$

a) Zeigen Sie, dass es eine Umgebung $U = U((1,0))$ des Punktes (1,0) und eine differenzierbare Funktion $z : U \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto z(x,y)$ gibt, so dass $g(x,y,z(x,y)) = 0$ gilt.

b) Berechnen Sie von dieser implizit definierten Funktion z die partiellen Ableitungen $z_x(x,y)$ und $z_y(x,y)$ im Punkt (1,0).

c) Für die zweiten partiellen Ableitungen $z_{xx}(x,y)$ und $z_{yy}(x,y)$ im Punkt (1,0) gilt

$$z_{xx}(1,0) = -\frac{1}{8} \quad \text{und} \quad z_{yy}(1,0) = -\frac{1}{8}.$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $z_{xy}(x,y)$ und $z_{yx}(x,y)$ der Funktion z im Punkt (1,0).

d) Geben Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung $T_2((x,y);z;(1,0))$ der Funktion z zum Entwicklungspunkt (1,0) an.

1.8.2 Aufgabe.

Gegeben sei die Abbildung

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto g(x,y)\ :=\ x^4 + y^4 + xy^2 - 2x^2 - y^2.$$

a) Zeigen Sie, dass es eine in einer Umgebung $U(0)$ von $x_0 := 0$ durch die Gleichung $g(x,y) = 0$ und die Bedingung $y(0) = 1$ implizit definierte differenzierbare Funktion $y : U(0) \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto y(x)$ gibt.

b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion y an der Stelle $x_0 = 0$.

1.9 Übungaufgaben zu Abschnitt 1.9

1.9.1 Aufgabe. Vorgegeben sei die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto g(x,y) \ := \ 16y - (x^2+y^2)^2.$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $g(x,y)$ keine stationären Punkte (x_0,y_0) besitzt, für die $g(x_0,y_0)=0$ gilt.

b) Maximieren Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y) \ := \ e^x,$$

unter der Nebenbedingung $g(x,y)=0$.

b1) Begründen Sie, dass obige Aufgabe lösbar ist. Sie können ohne Beweis verwenden, dass die Menge

$$M \ := \ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y)=0\}$$

abgeschlossen und beschränkt ist.

b2) Stellen Sie die Lagrangefunktion $(x,y,\lambda) \mapsto F(x,y,\lambda)$ auf und bestimmen Sie die stationären Punkte von $F(x,y,\lambda)$.

b3) Lösen Sie die obige Maximierungsaufgabe.

1.9.2 Aufgabe.

Minimieren Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) \ := \ 2z+6y$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y,z) \ := \ x^2e^z + y^2 + z^2 - 10 = 0.$$

a) Begründen Sie, dass obige Aufgabe lösbar ist. Sie können ohne Beweis verwenden, dass die Menge

$$M \ := \ \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z)=0\}$$

abgeschlossen und beschränkt ist.

b) Stellen Sie die Lagrangefunktion $(x,y,\lambda) \mapsto F(x,y,z,\lambda)$ auf und bestimmen Sie die stationären Punkte von $F(x,y,z,\lambda)$.

c) Lösen Sie die obige Minimierungsaufgabe.

1.9.3 Aufgabe.

Für $x_i > 0$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) sei durch

$$f(\vec{x}) \ := \ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5$$

($\vec{x} = (x_1, \ldots, x_5)$) eine Nutzenfunktion f gegeben. Bestimmen Sie alle lokalen Maxima von f unter den beiden Nebenbedingungen $3x_1 + x_2 = 200$ und $2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1000$.

1.9.4 Aufgabe.

Bestimmen Sie die Extrema der Funktion

$$f(x, y) = 1 + yx^2$$

auf der Einheitskreisscheibe $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.