1 Übungsaufgaben zu Kapitel 3

1.1 Übungsaufgaben zu Abschnitt 3.1

1.1.1 Aufgabe.

Die Abbildung

$$D : \begin{cases} \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \\ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4) \mapsto D(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4) \end{cases}$$

definiere eine Determinantenform (auf $\mathbb{R}^4$).

Drücken Sie unter Verwendung der Eigenschaften einer Determinantenform:

a) $D((1,1,0,-1),(2,4,1,-1),(1,2,1,-1),(1,2,1,0))$,

b) $D((1,1,0,2),(2,4,-1,3),(1,2,1,3),(1,2,2,4))$,

in Abhängigkeit von $M := D(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ aus.

1.1.2 Aufgabe.

Es seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ 1 & \beta & \beta^2 & \beta^3 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 & \gamma^3 \\ 1 & \delta & \delta^2 & \delta^3 \end{pmatrix} = (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)(\gamma-\beta)(\delta-\beta)(\delta-\gamma).$$

1.1.3 Aufgabe.

Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 7 & 11 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5},$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} -7-\lambda & -2 & 2 \\ 10 & 5-\lambda & -2 \\ -12 & 0 & 9-\lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

1.1.4 Aufgabe.

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -7-\lambda & -2 & 2 \\ -4 & 10 & 5-\lambda & -2 \\ 6 & -12 & 0 & 9-\lambda \end{pmatrix} \quad .$$

1.1.5 Aufgabe.

Für $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sei D_n die $n \times n$-Matrix

$$D_n := \begin{pmatrix} 1+\lambda^2 & \lambda & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda & 1+\lambda^2 & \lambda & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1+\lambda^2 & \lambda & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda & 1+\lambda^2 & \lambda \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda & 1+\lambda^2 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: $\det(D_n) = \sum_{i=0}^{n} \lambda^{2i}$.

1.1.6 Aufgabe.

Zeigen Sie, dass für die $(n \times n)$-Matrix A mit Diagonaleinträgen λ und sonstigen Einträgen μ gilt

$$\det(A) = (\lambda + (n-1)\mu)(\lambda - \mu)^{n-1}.$$