Landeslehrerprüfungsamt
Außenstelle beim
Regierungspräsidium
Freiburg, Abt 7: Schule und Bildung

Staatliches Seminar
für Didaktik und Lehrerbildung
(Gymnasien) Freiburg

Zweite Staatsprüfung für die Laufbahn des höheren Schuldienstes an Gymnasien
(18 monatiger Vorbereitungsdienst)

Prüfungsbereich Dokumentation und Präsentation

Studienreferendar: Dr. Daniel Hug

Kurs: Januar 2005 – Juli 2006

Fach: Mathematik

Ausbilder: Dr. Gerhard Metzger

Thema: Modellieren und Entscheiden bei Ungewissheit

Klasse: 11 a, Martin-Schongauer-Gymnasium Breisach

Versicherung:

Ich versichere, dass ich diese schriftliche Arbeit selbstständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe und dass ich alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken entnommen sind, durch Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht habe.

Freiburg, 05.01.2006
(Ort, Datum)

(Unterschrift)

Im Falle der Aufbewahrung meiner Arbeit im Archiv des Seminars für Schulpädagogik bzw. Staatsarchiv erkläre ich mein Einverständnis, dass die Arbeit Benutzern zugänglich gemacht werden kann.

Freiburg, 05.01.2006
(Ort, Datum)

(Unterschrift)

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Rahmenbedingungen **2**
2.1 Lehrpläne 2
2.2 Klassensituation 3
2.3 Schulbücher 4
2.4 Rechner 4

3 Methodisch-didaktische Überlegungen **5**
3.1 Unterrichtszusammenhang 5
3.2 Zufall und Stochastik 5
3.3 Leitideen 6

4 Durchführung, Analyse und Reflexion **7**
4.1 Einstieg in das Thema 7
4.2 Phase 1: Binomialverteilung 8
4.3 Phase 2: Erwartungswert 16
4.4 Phase 3: Hypothesentest 19

5 Rück- und Ausblick **25**

Literatur **28**

Anhang **i**

> Statistics is part of applied mathematics. There is something about making inferences that goes beyond mathematics. In mathematics you must have something that is correct and beautiful, and that is enough to qualify as mathematics. In statistics, however, there is the question of trying to decide what is true in the world, and that is somehow going beyond any formal system.
>
> **Persi Diaconis** (Stanford)

1 Einleitung

Wie kaum eine andere mathematische Disziplin hat sich die Stochastik seit Beginn des 20. Jahrhunderts stürmisch entwickelt. Die Wurzeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung liegen im 17. Jahrhundert (Glücksspiel), während sich systematische Fragestellungen der Statistik im 18. Jahrhundert (Datenerhebung, Sterbetafeln im Versicherungswesen) finden. Tatsächlich kann man erste Ansätze jeweils schon in der Antike erkennen. Allerdings zeigt das sechste Hilbertsche Problem, das David Hilbert als eines von 23 wesentlichen Problemen auf dem Internationalen Mathematikerkongress im Jahr 1900 formuliert hat, dass eine mathematische Behandlung der Grundlagen der Physik und der Wahrscheinlichkeitstheorie zu diesem Zeitpunkt noch ausstand. Für die Wahrscheinlichkeitstheorie und damit auch für wichtige Gebiete der Physik gelangen Alexander Kolmogorov in seinem Werk über die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (1933) entscheidende Fortschritte. Die systematische Untersuchung statistischer Fragestellungen erfolgte etwa ab 1920. Erste Darstellungen der Statistik in Buchform gehen auf Ronald Aylmer Fisher (1925, 1935) zurück. Mittlerweile haben sich Methoden und Denkweisen der Stochastik in einer Vielzahl von Bereichen und insbesondere in praktischen Anwendungen niedergeschlagen. Das heutige Spektrum der Gebiete reicht dabei von der Psychologie, der Meinungsforschung (Politik, Marketing), den Natur- und modernen Ingenieurwissenschaften (Mikrosystemtechnik), über das Banken- und Versicherungswesen bis hin zur Reinen Mathematik. Dies bezeugt den grundsätzlich interdisziplinären Charakter der Stochastik (vgl. [19]).

Aufgrund der Bedeutung und Präsenz der Stochastik in unserer Lebenswelt ist eine Diskussion von typischen Fragen und ausgewählten Problemen der Stochastik in Klasse 11 sinnvoll und von hohem allgemeinbildenden und erzieherischen Wert. Dies gilt um so mehr, als die klassische Differenzialrechnung und die Lineare Algebra, die sonst weitgehend die Themenfelder bis zum Abitur bestimmen, in Entsprechung zur klassichen Mechanik (Klasse 11) hauptsächlich deterministischer Natur sind. In diesem Sinn kann die Behandlung der Stochastik auch prinzipiell dazu beitragen, das eigene Weltbild zu erweitern und vorzubereiten auf die Einsichten, die z.B. qualitativ in der Quantenphysik (Kursstufe Physik) gewonnen werden können.

2 Rahmenbedingungen

Der äußere Rahmen für den Mathematikunterricht ist durch verschiedene Faktoren wie geltende und künftige Lehrpläne, den Klassenverband, die Person des Lehrers, das zur Verfügung stehende Schulbuch und durch die verfügbaren Medien bedingt. Die damit vorliegenden Bedingungen, die in diesem Abschnitt umrissen werden sollen, sind auch bestimmend für die nachfolgende innere Planung.

2.1 Lehrpläne

Der für die Klasse 11 gültige Lehrplan baut in der Lehrplaneinheit 1 (Binomialverteilung) auf konkreten Vorkenntnissen auf, die in der **Klasse 10** erworben werden sollen. Hierbei steht die quantitative Beschreibung von Vorgängen, die vom Zufall bestimmt sind, schon in Klasse 10 im Vordergrund. Einerseits werden Grundbegriffe wie Zufallsexperiment (auch mehrstufig), Ereignis, Zufallsvariable und Wahrscheinlichkeit eingeführt, andererseits Konzepte wie stochastische Unabhängigkeit oder Wahrscheinlichkeitsverteilungen erstmals diskutiert. Als Zugang bietet sich eine Kombination aus Abzählargumenten, die in natürlicher Weise an die Gleichverteilung gekoppelt sind, und einer frequentistischen Analyse, die einem starken Gesetz der großen Zahlen entspricht, an. Beide Zugänge haben ihre Grenzen und bergen Gefahren, haben aber jeweils den Vorteil großer Anschaulichkeit. Diese Anschaulichkeit kann durch die Nutzung von Baumdiagrammen und die Verwendung von Pfadregeln ausgebaut werden. Eine gewisse inhaltliche Standardisierung findet schließlich aufgrund der Zentralen Klassenarbeit statt.

In **Klasse 11** erfährt die Wahrscheinlichkeitsrechnung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Zug eine Erweiterung und Abrundung, die erhöhte Anforderungen an die Arbeitsqualität, die Arbeitsintensität und die Eigenverantwortung der Schüler stellt (vgl. die pädagogischen Leitgedanken des Bildungsplans zum Jahrgangsplan der Klasse 11). Dies schlägt sich inhaltlich in den folgenden Punkten nieder:

- Der spielerisch motivierende Rahmen der Glücksspiele wird durch einen ernsthafteren Praxisbezug erweitert.

- Aufgrund der Unabhängigkeitsstruktur und des sequentiellen Aufbaus aus Bernoulli-Experimenten ist das zu behandelnde Modell einer Bernoulli-Kette zwar von recht spezieller Natur, dennoch treten Bernoulli-Ketten und die damit verknüpften Binomialverteilungen in unterschiedlichen Bereichen zumindest in guter Näherung auf. Die Einordnung einer Vielzahl von Beispielen aus unterschiedlichen Zusammenhängen in ein allgemeines System erfordert ein erhöhtes Abstraktionsvermögen.

- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung und der Erwartungswert einer Zufallsvariable, die nur endlich viele verschiedene Werte annehmen kann, lassen sich im Fall einer binomialverteilten Zufallsvariable noch relativ einfach behandeln, sollten aber auch allgemeiner vorgestellt werden.

- Das Prinzip des Testens von statistischen Hypothesen wird erstmals angesprochen. Auf diese Weise entsteht eine natürliche Verbindung von Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Mit der Problematik des Testens von Hypothesen über die zugrundeliegenden Parameter der Binomialverteilung wird ein Grundproblem der Statistik angesprochen. Als Gütekriterium für eine statistische Entscheidung kann man Fehler 1. und 2. Art ansehen.

Nach dem bisherigen Lehrplan ist damit die Stochastik in der Schule eventuell schon abgeschlossen. Dies ist zumindest dann der Fall, wenn man sich nach der schriftlichen Abiturprüfung nicht für ein Wahlthema aus der Stochastik entscheidet. Insbesondere ist Stochastik in den letzten Jahren nicht Gegenstand der schriftlichen Abiturprüfung gewesen.

Bildungsstandards. Durch die neuen Bildungsstandards ergeben sich einige Verschiebungen, die insgesamt für eine Stärkung und größere Kontinuität bei der Behandlung stochastischer Themen sorgen.

- Bis Ende von Klasse 6 sollen die Schülerinnen und Schüler Daten systematisch sammeln, anordnen und übersichtlich darstellen können. Ferner sollen sie in der Lage sein, vorliegende Daten zu bewerten und daraus Schlussfolgerungen zu ziehen. Diese Kompetenzen entsprechen der Leitidee “Daten und Zufall”.
- Gemäß der Leitideen “Daten und Zufall” sowie “Modellieren” sollen bis Ende von Klasse 8 Wahrscheinlichkeiten auch bei mehrstufigen Zufallsexperimenten berechnet und Zufallsexperimente durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen beschrieben werden können. Insbesondere ist an die Nutzung von Baumdiagrammen und Pfadregeln gedacht.
- Bis Ende von Klasse 10 sollen die Schülerinnen und Schüler zusätzlich Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen und Erwartungswerte von Zufallsvariablen verstehen und berechnen können. Insbesondere wird die Einführung von Binomialverteilungen nun nach Klasse 10 vorverlagert. Zur “Vernetzung” stochastischer Themen mit anderen Fragestellungen und Fertigkeiten ist z.B. ein grafikfähiger Taschenrechner einzusetzen.
- Die durchgehende Vorverlagerung, Straffung und Präsenz stochastischer Themen ermöglicht es in der Kursstufe, auch Zufallsexperimente mit abzählbar unendlich vielen Ausgängen zu berechnen, Hypothesen über Vorgänge, die vom Zufall abhängen, quantitativ zu beurteilen und den diskreten Rahmen exemplarisch durch eine stetige Verteilung zu ergänzen.

2.2 Klassensituation

Die 28 Schüler der Klasse 11 a des mathematisch-naturwissenschaftlichen Zuges stellten sich im Hinblick auf ihre Einstellung zur Mathematik und in Bezug auf ihre Leistungsbereitschaft zunächst als eine inhomogene Gruppe dar. Einige der Schülerinnen und Schüler sind hoch motiviert, andere halten sich selbst dann zurück, wenn sie einen Beitrag leisten könnten. Insgesamt hat sich die Arbeitshaltung und die Atmosphäre innerhalb der Klasse in den letzten Wochen gut entwickelt. Von den 9 Schülerinnen, die sich schon in der Sitzordnung von den Schülern abtrennen, sind etwa 4 Schülerinnen sehr engagiert und zeigen eine gute Leistungsfähigkeit, während sich die anderen Schülerinnen sehr unauffällig verhalten. Von den 19 Schülern wiederholen 2 Schüler die 11. Klasse, ein Schüler besuchte zuvor eine Realschule. Mindestens 3 Schüler(innen) erhalten schon seit längerer Zeit Nachhilfe in Mathematik. Gerade bei den Schülern ist festzustellen, dass engagierte Beiträge und regelmäßige Nacharbeit zunächst nur zum Teil im gewünschten Umfang erbracht wurden. Nach einer Phase des gegenseitigen Kennenlernens hat sich das Bild mittlerweile positiv entwickelt. Es entstehen häufig auch nach Ende des Unterrichts noch interessierte Diskussionen unter den Schülerinnen und Schülern, an denen klar zu erkennen ist, dass sie die besprochenen Themen begreifen wollen.

2.3 Schulbücher

Am MSG in Breisach steht für Klasse 11 in Mathematik das Unterrichtswerk LS 11 (Lambacher Schweizer) [8] zur Verfügung. Die Kapitel I und II sind binomialverteilten Zufallsvariablen und beurteilender Statistik gewidmet. Im Prinzip deckt das Buch damit die Anforderungen des bisherigen Lehrplans voll ab und enthält zusätzlich darüber hinausgehendes Material. Andererseits ist die Darstellung nicht an die Verwendung eines grafikfähigen Taschenrechners (GTR) angepasst und enthält stattdessen eine Beschreibung von Tabellenwerken. Die Darstellung der Neubearbeitung [5] ist dagegen auf die Nutzung eines GTR gut abgestimmt, enthält zusätzliche Typen von Fragestellungen und ist insgesamt deutlich kompakter geschrieben. Der Band [20] bezieht ebenfalls einen GTR ein, enthält im Kapitel über Stochastik einen längeren wiederholenden Vorspann, ist dann aber thematisch sehr stark eingeschränkt. Eine Reihe neuerer Schulbücher, die für andere Bundesländer konzipiert sind, sind ausschließlich der Stochastik gewidmet (wie z.B. [3], [10], [25]). Für die Planung der Unterrichtseinheit wurden zusätzlich auszugsweise [15], [16], [23] sowie eine Reihe anderer Schulbücher verwendet. Der Text [7] führt speziell in den Gebrauch des TI-83 im Rahmen der Stochastik ein, [21] enthält unter anderem originelle Aufgaben aus der Stochastik.

Für das Studium der Stochastik sind in den letzten 20 Jahren eine Reihe von Lehrbüchern in deutscher Sprache erschienen. Die Neuerscheinungen [9], [18], [31] sind spezieller der Lehramtsausbildung bzw. der Mathematikdidaktik zugeordnet. Die Tagungsbände und Arbeitsberichte des Arbeitskreises Stochastik der GDM [4], [6] enthalten darüber hinaus zahlreiche Anregungen und konzeptionelle Betrachtungen.

2.4 Rechner

Der grafikfähige Taschenrechner TI-83 Plus wurde seit Beginn des Schuljahres konsequent eingesetzt. Neben diesen Hilfsmitteln hätte sich die Nutzung von weiterer Software angeboten (Excel, Maple, Software der Firma Hoche). Viele didaktische und praktische Hinweise und Referenzen zum Stochastiklernen mit Neuen Medien werden in [4] und [26, Kapitel 6] vorgestellt. Für den konkreten Unterrichtsgang konnte dann tatsächlich lediglich auf den TI-83 Plus sowie auf den Einsatz eines privaten Notebooks zurückgegriffen werden, da die Computeranlage am MSG während der gesamten Unterrichtseinheit nicht zur Verfügung stand.

3 Methodisch-didaktische Überlegungen

In diesem Abschnitt werden einige über den äußeren Rahmen hinausgehende planerische Betrachtungen vorgestellt. Weitere Überlegungen, die z.B. fachlich-inhaltliche Lernziele betreffen, werden im nächsten Abschnitt vor jeder der drei Unterrichtsphasen, die Hauptbestandteil der Dokumentation sind, beschrieben. Eine tabellarische Übersicht zur Unterrichtseinheit findet sich in Anhang A.

3.1 Unterrichtszusammenhang

Zu Beginn des Schuljahres hatten wir uns mit der Darstellung und Beschreibung von Abhängigkeiten, insbesondere mit dem Funktionsbegriff befasst. Dabei wurde der GTR TI-83 Plus eingeführt und angewendet. Es schloss sich die Untersuchung von speziellen (insbesondere linearen) Funktionen an.

Der Beginn der Einheit über Stochastik fiel auf den 17.10.05. Nach zwei Wochen stellten die Herbstferien eine erste Unterbrechung dar. Direkt im Anschluss an die Herbstferien hätte eine Gastklasse aus Dänemark eintreffen sollen, so dass sämtlicher Fachunterricht in dieser Woche ausgefallen wäre. Im Verlauf der Ferien stellte sich dann aber sehr kurzfristig ein Planungsfehler heraus, so dass in der Woche vom 07.11.05 bis zum 11.11.05 regulärer Unterricht stattfand. Die dänische Gastklasse kam stattdessen eine Woche später. Den inhaltlichen Abschluss der Einheit markiert die Klassenarbeit am 30.11.05 sowie deren Besprechung am 02.12.05.

Im Anschluss wurden wieder Themen der Analysis behandelt. Der Einschub der Unterrichtseinheit über Stochastik führte so zu einer anregenden, inhaltlichen Verschränkung von Analysis und Stochastik.

3.2 Zufall und Stochastik

Um die Stimmungslage und den Kenntnisstand der Klasse zu erfahren, führte ich zu Beginn der Unterrichtseinheit eine Befragung durch. Die Schülerinnen und Schüler sollten u.a. kurz schriftlich Stellung nehmen zu den Fragen: Was bedeutet Zufall für mich (anschaulich)? In welchen Situationen und Lebensbereichen spielt der Zufall eine (wesentliche) Rolle? Trotz des insgesamt breiten Spektrums der Antworten war eine starke Beeinflussung durch Motive, die aus dem Bereich des Glücksspiels stammen, festzustellen. Andererseits wurde mehrfach geäußert, dass man nicht an den Zufall glaube und dass letztlich alles vorherbestimmt sei. Teilweise widersprachen sich die Antworten ein und der selben Person. Eine sehr interessante und vielschichtige Analyse des Zufallsbegriffs und seiner Entwicklung im Alltag, in der Literatur (auch historisch), in den Wissenschaften und insbesondere in Schulbüchern enthält Abschnitt 1.1 in [12]. Insbesondere in Abschnitt 1.1.3 wird das qualitative Vorverständnis von Schülerinnen und Schülern zum Thema Zufall untersucht. Die Ergebnisse in [12] beschreiben im wesentlichen auch das Stimmungsbild der von mir befragten Klasse zutreffend.

3.3 Leitideen

Die prinzipielle Relevanz von Stochastik als Thema in der Schule ist mit der zunehmenden Bedeutung stochastischer Denkweisen in allen Lebensbereichen begründet (vgl. die Einleitung, [4], [6], [19]). In der dargestellten Unterrichtseinheit wurde versucht, diesem Umstand im gegebenen Rahmen gerecht zu werden. Einige allgemeine Überlegungen, die bei der Planung der Unterrichtseinheit eine Rolle gespielt haben, sind nachfolgend aufgeführt. Die sich anschließende detaillierte Dokumentation, Analyse und Reflexion in Abschnitt 4 konkretisiert und erweitert diesen Katalog parallel zum tatsächlichen Unterrichtsverlauf.

1. Die Gebiete der Mathematik und ihr spezifisches Methodenrepertoir sind faktisch eng miteinander verzahnt und voneinander abhängig. Die gehaltene Unterrichtseinheit bietet die Möglichkeit, in natürlicher Weise eine solche Vernetzung z.B. von Stochastik und Analysis in der Schule zu erreichen (vgl. [4, Teil 1]). An analytischen Fähigkeiten wird insbesondere die funktionale Sichtweise gefördert. Begriffe wie Monotonie, Extremwert und – allgemeiner – extremale Situationen können informell erklärt und untersucht werden. Andererseits stehen von Anfang an unterschiedliche grafische (auch diskrete) Darstellungen und deren Interpretation im Vordergrund.

2. Eine Verbindung von Analysis und Stochastik entsteht zusätzlich durch die einheitliche Verwendung eines GTR. Dieses Hilfsmittel erlaubt es, langwierige Berechnungen im Zusammenhang mit realistischen, komplexen Fragestellungen rasch auszuführen und liefert damit den Freiraum für eher planerische und reflektierende Tätigkeiten. Andererseits lässt sich der GTR auch dazu einsetzen, Vermutungen zu entwickeln und auf ihre Stichhaltigkeit hin zu überprüfen. Wiederum auf einer anderen Ebene erfordert und fördert die effektive Nutzung des GTR eine umsichtige und konsequente Handhabung, die zudem die Bedeutung und Verbindung zur “mathematischen Theorie” unterstreicht. Angestrebt werden soll eine Balance zwischen kritischer Distanz und Vertrauen.

3. Durch die Behandlung des Testens von Hypothesen bei Binomialverteilungen ist eine Verbindung von Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung gegeben. Die spezielle Modellannahme erlaubt konkrete, präzise Berechnungen mit Hilfe des GTR. Es ergeben sich aber über den hier dokumentierten Unterrichtsgang hinaus auch Anknüpfungspunkte für mathematik-historische und wissenschaftskritische Betrachtungen (vgl. [19]). Aus allgemeinerer Sicht erfüllt die Aktivität des Testens die Kriterien der Historizität, der Typizität, der Aktualität und der Archetypizität (vgl. H. Schupp in [4]).

4. Im Rahmen der Unterrichtseinheit über Stochastik treten in vielfacher Weise Fragen der Modellierung auf. Problemstellungen sind häufig in einem umgangssprachlich formulierten, praxisnahen Kontext vorgegeben. Dies erfordert einen ersten Übersetzungs- und Interpretationsprozess, der die Klärung der vorläufigen Zielvorstellungen einschließt. Nach einer innermathematischen Bearbeitung, die Näherungen, Vereinfachungen oder Verallgemeinerungen beinhalten und den Einsatz zusätzlicher Hilfsmittel (GTR, Tabellenkalkulation, CAS) erfordern

kann, muss ein erneuter Übersetzungsprozess erfolgen, der die kritische Überprüfung des Gefundenen beinhaltet. Eventuell sind diese Schritte zu wiederholen. Die einzelnen Schritte fördern u.a. argumentative und soziale Kompetenzen, insbesondere die Fähigkeit des Perspektivwechsels. Mathematik wird so als dynamischer und offener Prozess erfahrbar.

5. Für die Gestaltung und Umsetzung des Unterrichts wurde ein weitgehend problemorientierter, exemplarischer Zugang gewählt. Dabei wurde versucht, mit einem möglichst geringen Anteil an Begriffen und mathematischem Kalkül auszukommen. In jeder Phase der Unterrichtseinheit ist ein konkretes Problem oder eine spezifische Fragestellung der Ausgangspunkt. Die Schülerinnen und Schüler wurden in den Prozess des Entwickelns (und damit des Analysierens) von Aufgaben eingebunden. Durch (freiwillige) Langzeitaufgaben sollte einerseits ein unverkrampftes, langfristiges Denken und Planen eingeleitet, andererseits ein verantwortlicher Umgang mit der eigenen Zeit und Arbeitskraft ermöglicht werden. Dies sollte schließlich auch das mathematische Selbstbewusstsein fördern.

6. Die Bevorzugung einer speziellen Unterrichtsform oder Methode wurde bewusst vermieden. Stattdessen sollte ein möglichst lebendiger Wechsel von Lehrervortrag und Lehrersteuerung, von Aktivitäten der Schüler in Einzel-, Partner- und Gruppenarbeit, von Vorträgen und Erklärungen von Schülerinnen und Schülern sowie von Diskussionen und Überlegungen in kleinen und in großen Gruppen stattfinden.

4 Durchführung, Analyse und Reflexion

In diesem Abschnitt werden die acht Unterrichtsstunden, auf die sich die Dokumentation bezieht, genauer beschrieben. An jede Unterrichtsstunde schließt sich eine Analyse/Reflexion an. Der wesentliche Teil der Unterrichtseinheit ist in drei Phasen gegliedert. Gegenstand der Dokumentation sind die Stunden 5–7 aus Phase 1, die Stunden 10 und 11 aus Phase 2 und die Stunden 14–16 aus Phase 3. Am Rande dieser Phasen finden sich Übergänge in Form von Wiederholungen, Übungsteilen und Vertiefungen. Diese Übergänge, die teilweise durch die schon erwähnten Unterbrechungen bedingt waren, werden nachfolgend zumindest skizziert, um den Zusammenhang der Darstellung sicherzustellen.

4.1 Einstieg in das Thema

1. Stunde. Der amerikanische Psychoanalytiker und Autor Sheldon B. Kopp formuliert in seinen “ewigen Wahrheiten” (vgl. [10, S. 9]) insbesondere zwei Thesen, welche die unsichere Basis für viele unserer Entscheidungen betreffen. Nach Ergänzung einiger weiterer Hinweise auf den stochastischen Charakter unseres Daseins forderte ich die Schülerinnen und Schüler auf, festzuhalten, welche Bedeutung der Zufall für sie hat und in welchen Lebensbereichen dieser eine Rolle spielt. Ferner sollten sie die aus Klasse 10 bekannten Begriffe und Inhalte aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung auflisten und den Grad der Vertrautheit mit diesen angeben. Im Anschluss stellte ich

Ihnen vier typische, angewandte Fragen aus dem Umfeld der Stochastik vor. In Gruppenarbeit befassten sich die Schülerinnen und Schüler dann mit einem Problem der Dopingkontrolle aus [20, S. 204], das ich als Arbeitsblatt vorbereitet hatte. Hier sollten Themen aus Klasse 10 wie *Baumdiagramm* und *Pfadregeln* wiederholt und angewandt werden.

2. Stunde. Verschiedene Schüler(innen) trugen an der Tafel ihre Lösung der Arbeitsaufträge des Arbeitsblattes der vorangehenden Stunde vor. Dies war dann der Ausgangspunkt für eine gemeinsam an der Tafel entwickelte, tabellarische Übersicht zu den Begriffen und Konzepten der Wahrscheinlichkeitsrechnung aus Klasse 10, die im folgenden benötigt wurden. Die linke Spalte dieser Tabelle enthielt Schlüsselbegriffe wie z.B. *Zufallsexperiment, Baumdiagramm, Pfad, Ergebnis, Ereignis, Zufallsvariable* oder auch die Beschreibung von Methoden in allgemeiner Form, während die rechte Spalte der Tabelle jeweils dazu passende Beispiele enthielt. Eingeführt wurde der Begriff eines *Wahrscheinlichkeitsraums*, den die Schüler zwar der Sache nach kannten, allerdings nicht in formaler Weise.

3. und 4. Stunde. In Gruppenarbeit untersuchte die Klasse das Beispiel des viermaligen Wurfs einer gefälschten Münze. Ein Arbeitsauftrag gab dabei einige Zielvorgaben vor. Das anschauliche Instrument des Baumdiagramms und Pfadregeln führten problemlos zu allgemeinen Formeln für Anzahlen und Wahrscheinlichkeiten im Zusammenhang mit der *unabhängigen Wiederholung* eines Zufallsexperiments, das genau *zwei Ergebnisse* zulässt (in der Folge häufig als Treffer und Niete bezeichnet). Damit konnte das Konzept einer *Bernoulli-Kette* allgemein formuliert werden. Dabei wurde auch an die Bedeutung und das Berechnungsverfahren der *Binomialkoeffizienten* erinnert. Als Hausaufgabe sollten spezielle Binomialkoeffizienten konkret berechnet werden.

4.2 Phase 1: Binomialverteilung

Die folgenden Unterrichtsziele betreffen die Phase 1 der dokumentierten Unterrichtseinheit. Diese sind zugleich als Langzeitziele anzusehen, da auch in den folgenden Phasen die zuvor erworbenen Kompetenzen genutzt und dadurch vertieft werden sollen.

Lernziele in Phase 1: Die Schülerinnen und Schüler sollen

- stochastische Situationen erkennen, die sich mit Hilfe des Modells einer Bernoulli-Kette beschreiben lassen.
- das Konzept einer *binomialverteilten* Zufallsvariable und einer *Binomialverteilung* verstehen und erkennen, dass mit Hilfe von Zufallsvariablen eine effektive Beschreibung von Ereignissen möglich ist.
- in der Lage sein, die Wahrscheinlichkeiten einfacher und zusammengesetzter Ereignisse unter der Annahme einer Binomialverteilung zu berechnen (Aufgabentyp A).
- den GTR einsetzen können, um Berechnungen auszuführen, die von Hand nicht praktikabel wären sowie um Schaubilder und Grafiken zu erstellen.

- erkennen, dass man im Zusammenhang mit Binomialverteilungen verschiedene Parameter (Länge der Kette, Trefferwahrscheinlichkeit) variieren kann, welche die zu berechnenden Wahrscheinlichkeiten bestimmen (qualitatives Verständnis).

- die (komplexeren) analytischen Problemstellungen der Aufgabentypen B – D nachvollziehen und lösen können (quantitatives Verständnis) und lernen, diese auf andere Situationen zu übertragen.

- den Modellierungsprozess selbstständig durchführen und Anwendungsmöglichkeiten erkennen.

5. Stunde. Zu Beginn der Stunde wiederholte eine Schülerin das für den weiteren Verlauf zentrale Konzept einer Bernoulli-Kette. Aufgegriffen wurde im Unterrichtsgespräch der Begriff eines Wahrscheinlichkeitsraumes. Dies ist ein Paar $(S, \mathbb{P})$, welches aus einer endlichen Menge $S = \{e_1; \ldots; e_m\}$ und einer Funktion $\mathbb{P} : S \to [0, 1]$ besteht, so dass

$$\mathbb{P}(e_1) + \ldots + \mathbb{P}(e_m) = 1 \tag{1}$$

gilt. Ein Summationszeichen kannten die Schüler zwar, allerdings vermied ich dieses weitgehend, um den mathematischen Zeichensatz so gering wie möglich zu halten. Ich fügte ferner an, dass wir die Funktion $\mathbb{P}$ auch auf Ereignisse $E \subseteq S$ anwenden, d.h.

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{e \in E} \mathbb{P}(e).$$

Dabei gab ich die rechte Seite der Gleichung nur in Worten an, erklärte die formalere Schreibweise jedoch interessierten Schülerinnen und Schüler am Ende der Stunde.

Zur Verständniskontrolle sollten die Schülerinnen und Schüler in Einzel- oder Partnerarbeit die Parameter von Bernoulli-Ketten in Sachaufgaben bestimmen [8, S. 10, Nr. 3 und 5]. Wichtig war hier die zusätzliche Einsicht, dass die Interpretation als “Treffer” bzw. “Niete” zwar willkürlich, eine passende Wahl allerdings vorteilhaft ist. In Nr. 5 musste zunächst die korrekte Entscheidung über das Vorliegen einer Bernoulli-Kette getroffen werden. Meine Zusatzfrage nach der Wahrscheinlichkeit, dass von 8 Frauen genau 3 eine gestörte Farbwahrnehmung haben, wurde rasch beantwortet.

Mit dem Hinweis, dass man bei vielen Fragestellungen nur an der Wahrscheinlichkeit für das Vorliegen einer gegebenen Trefferzahl interessiert ist, und die Klasse ein solches Beispiel gerade gerechnet hatte, konnte ich die folgende Aussage formulieren und die anschließende allgemeine Sprechweise vorgeben.

Gegeben sei eine Bernoulli-Kette der Länge n mit Trefferwahrscheinlichkeit p. Die Zufallsvariable X gebe die Anzahl der Treffer an. Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X = k)$ von genau $k \in \{0; 1; \ldots; n\}$ Treffern

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}\,. \tag{2}$$

Man sagt, dass X *binomialverteilt* ist (mit den Parametern n und p).

Daran schloss ich an:

Die Zufallsvariable X in der vorangehenden Definition nimmt den Wert $k \in \{0; 1; \ldots; n\}$ mit der Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

an. Das Paar $(\{0; 1; \ldots; n\}, \mathbb{P})$ ist ein *Wahrscheinlichkeitsraum*. Die Funktion $\mathbb{P}$ nennt man *Binomialverteilung*.

In der restlichen Zeit wiederholten wir bei der Besprechung der Hausaufgaben die Berechnung von Binomialkoeffizienten. Es zeigte sich, dass neben der Definition

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad k \in \{1; \ldots; n-1\}, \qquad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

teilweise auch

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdots (n-k+1)}{k!}$$

bekannt war. Hier musste der Zusammenhang durch Kürzen hergestellt werden. Manche Schülerinnen und Schüler hatten einen Hinweis meinerseits, dass man den GTR zur Berechnung von Binomialkoeffizienten einsetzen könne, schon aufgegriffen. Das Eingabeverfahren wurde von den kundigen Schülerinnen und Schülern rasch an die anderen weitergegeben.

Als Hausaufgabe und zur Vorbereitung auf das Thema der kommenden Stunde sollte das Beispiel in [8, S. 13] erarbeitet werden.

Analyse. Die Wiederholung von Bernoulli-Ketten verlief unproblematisch, zumal es sich um eine sehr anschauliche Sprechweise für einen anschaulichen Sachverhalt handelt. Entsprechend gut wurde auch Aufgabe 3 gelöst. Bei Aufgabe 5 (a) bestand zunächst Unsicherheit über das Vorliegen einer Bernoulli-Kette. Erst die präzise Erläuterung eines Schülers klärte die Situation. Bei der Definition eines Wahrscheinlichkeitsraumes, die ich im Hinblick auf die Einführung der Binomialverteilung geplant hatte, ergaben sich in der allgemeinen Fassung keine Schwierigkeiten. Problematischer ist die Situation allerdings, wenn konkrete Beispiele betrachtet werden und die Elemente der Grundmenge S bestimmt und geeignet indiziert werden müssen. Die Summationsbedingung (1) für eine Wahrscheinlichkeitsfunktion war von den Pfadregeln noch bekannt. Die Beziehung (2) wurde von zwei Schülern in Teamarbeit durch Verallgemeinerung der einführenden Beispiele zum wiederholten Münzwurf entwickelt, musste also nicht von mir vorgegeben werden. Zum Stundenende erkannte ein Schüler auf kombinatorischem Weg den Zusammenhang

$$\binom{n}{2} = (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1$$

für $n = 6$ und damit das allgemeine Prinzip.

Günstig wäre es eventuell gewesen, für die Werte der Binomialverteilung zu $n = 5$ oder $n = 6$ und zu verschiedenen Wahlen von p z.B. aus $\{0.4; 0.5; 0.6\}$ ein Stabdiagramm und eine Tabelle anlegen zu lassen. Andererseits konnte die entsprechende Aufgabe mit dem GTR in den folgenden Stunden effektiv bearbeitet werden. Die Vorzüge des GTR waren zu diesem Zeitpunkt schon hervorgetreten und wurden zudem durch die Hausaufgabe deutlich. Den Zusammenhang mit der allgemeinen binomischen Formel hatte ich bewusst nicht thematisiert, da die Klasse aufgrund der Herleitung von (2) keine Schwierigkeiten sah. Ähnliche Überlegungen werden ohnehin bei der Berechnung des Erwartungswerts eine binomialverteilten Zufallsvariable angestellt.

Nach Stundenende sprach mich ein Schüler an, der versucht hatte, für den GTR ein Programm zu schreiben, das zu einzugebende Zahlen n und k den Wert $\binom{n}{k}$ berechnet, ohne dabei den vordefinierten Befehl zu nutzen. Dabei ergaben sich wegen der Verwendung der Fakultäten-Taste z.B. schon bei $\binom{70}{1}$ Probleme. Ich versprach, über eine alternative Programmierung nachzudenken. Hieraus ergab sich später ein schönes Schülerreferat.

6. Stunde. Im Verlauf der Stunde sollten die Schülerinnen und Schüler nützliche Fertigkeiten im Umgang mit dem GTR im Rahmen der Stochastik erwerben. Zunächst wurde die Hausaufgabe (Beispiel auf Seite 13 in [8]) besprochen. Dabei stellten die Schülerinnen und Schüler fest, dass die direkte Berechnung von Teil b) der Aufgabe allein mit Hilfe der Grundrechenarten des GTR überaus aufwendig und fehleranfällig ist. Als Zusatz erläuterte ich, warum bei Zufallsvariablen mit ganzzahligen Werten die Gleichung $\mathbb{P}(X \leq 6) = 1 - \mathbb{P}(X \geq 7)$ gilt. Eine grafische, erläuternde Darstellung an der Tafel wie auf Seite 16 in [8] war hierfür sehr hilfreich.

Nachdem einige wenige Schüler(innen) schon Stochastik-Funktionen des GTR herausgefunden hatten und die vorangehende Hausaufgabe die Zweckmäßigkeit des Einsatzes des GTR unterstrichen hatte, wurden in Partner- bzw. Gruppenarbeit (je nach Sitzordnung) die folgenden Anweisungen eines Arbeitsblattes zum GTR bearbeitet (hier mit Platz sparenderem Layout):

Anweisungen zum GTR in der Stochastik, Teil 1:

1. Die Berechnung von $\binom{n}{k}$ geschieht mit `MATH` `PRB` `3: nCr`.

   Beispiel: $\binom{20}{5}$ erhält man mit `20` `MATH` `PRB` `nCr` $\longrightarrow$ `20 nCr` `5` `ENTER` $\longrightarrow$ 15504

2. Die Berechnung von $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ geschieht mit `2nd` `DISTR` `0:binompdf(`.

   Beispiel: $\binom{20}{6}0.8^6\,0.2^{14}$ erhält man mit dem Aufruf von `binompdf(` und der Eingabe

   `binompdf(20,0.8,6)` `ENTER`.

   Berechne ebenso: $\binom{20}{6}0.2^6\,0.8^{14}$

   Der Befehl `binompdf(20,0.8)` `ENTER` erzeugt eine Liste mit den 21 Werten $\binom{20}{k}0.8^k\,0.2^{20-k}$ für $k = 0; 1; \ldots; 20$. Mit `STO` `2nd` `L1` `ENTER` können diese Werte in einer Liste `L1` abgespeichert werden. Anstelle einer vollständigen Liste von Werten kann man auch nur die Werte zu einzelnen Parametern k eingeben wie beispielsweise in: `binompdf(20,0.8,{0,1,2,7,9})`.

3. Die Berechnung von $\mathbb{P}(X \leq 6)$ im Fall einer binomialverteilten Zufallsvariable X geschieht mit `2nd` `DISTR` `A:binomcdf(`.

   Im obigen Beispiel (HA) ist $n = 20$, $p = 0.8$. Man erhält dann

   `binomcdf(20,0.8,6)` `ENTER` $\longrightarrow \approx 1.845005 \cdot 10^{-6}$

   Berechne ebenso: $\mathbb{P}(X \leq 6)$ für $n = 20$, $p = 0.2$.

   Der Befehl `binomcdf(20,0.8)` erzeugt eine Liste mit den 21 Werten $\sum_{j=0}^{k} \binom{20}{j} 0.8^j \, 0.2^{20-j}$ für $k = 0; 1; \ldots; 20$. Mit `STO` `2nd` `L1` `ENTER` können diese in einer Liste abgespeichert werden. Wie oben kann man auch lediglich spezielle Parameterwerte k berechnen lassen: `binomcdf(20,0.8,`$\{0,1,2,7,9\}$`)`.

Da die Klasse das Arbeitsblatt sehr zügig bearbeitete, erwies es sich als günstig, dass ich den Auftrag, Aufgabe 6 in [8, S. 13] zu lösen, zusammen mit dem Arbeitsblatt ausgegeben hatte. Hierbei sollte zunächst ohne GTR ein geeigneter Ansatz zur Berechnung aufgestellt und dann erst – in einem zweiten Schritt – eine explizite Berechnung mit dem GTR durchgeführt werden. Dies gab den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, die neuen Kenntnisse eventuell schon direkt im Anschluss an Punkt 2 des Arbeitsblattes anzuwenden.

Als Hausaufgabe war Aufgabe 11 in [8, S. 17] zu bearbeiten. Zudem sollte jeder eine möglichst originelle (aber sinnvolle) eingekleidete Aufgabenstellung (er)finden.

Analyse. Das Beispiel aus dem Buch, das als Hausaufgabe zu bearbeiten war, wurde ebenso wie der zusätzliche Übergang zum komplementären Ereignis gut verstanden. In diesem Zusammenhang verzichtete ich darauf, abstrakter mit einer “Ereignisalgebra” zu argumentieren, da die Schülerinnen und Schüler hiermit offensichtlich nicht vertraut waren und es im vorliegenden Kontext nicht erforderlich ist.

Sehr gut wurde das Arbeitsblatt zum GTR aufgenommen. Die Arbeitsaufträge waren sehr eng abgesteckt. Die Schülerinnen und Schüler sollten hauptsächlich erfahren, wie hilfreich der GTR bei aufwendigen Berechnungen ist. Naturgemäß stellen sich bei der Verwendung des GTR Probleme dadurch ein, dass etwa

- Voreinstellungen oder eine Belegung von Speicherplatz mit Daten aus einem anderen Zusammenhang vorliegen, welche die aktuelle Berechnung beeinträchtigen;
- zum Teil Anweisungen nicht genau ausgeführt werden;
- längliche Tastenfolgen als unangenehm und nicht sehr einprägsam empfunden werden;
- an verschiedenen Stellen im Klassenzimmer unterschiedliche Probleme mit dem GTR auftreten, die erst mit einiger Erfahrung als typisch erkannt und schnell behoben werden können.

Zunächst erklärte ich den Schülerinnen und Schülern, dass es für uns zum GTR keine Alternative gibt, dass ich zudem den GTR zwar als ein sehr nützliches, aber keinesfalls als ein optimales Hilfsmittel ansehe. Ferner gab ich zu, dass ich mich selbst auch erst in den GTR einarbeite und durchaus für jede Unterstützung und jeden Vorschlag dankbar bin. Auf diese Weise konnte eine kritische, aber weitgehend positive Einstellung zum GTR erreicht werden. Ferner gab es immer wieder Situationen, in denen Schüler(innen) schneller das GTR-Problem einer Mitschülerin oder eines Mitschülers lösen konnten, als mir das möglich gewesen wäre. Auf diese Weise trägt die Nutzung des GTR zur Förderung von sozialer Kompetenz bei. Die teilweise Kompliziertheit der Eingabe erzwingt andererseits ein genaues Abwägen über den Nutzen des Einsatzes des GTR und erfordert gegebenenfalls Vorüberlegungen und Umformungen, die eine Anwendung des GTR erst ermöglichen. Die Schülerinnen und Schüler erfahren insbesondere, dass die Eingabe absolut präzis sein muss, da andernfalls Fehlermeldungen auftreten. Eine kleinere Schwierigkeit ergibt sich allerdings dadurch, dass sich “GTR-Sprache” und “mathematische Sprache” überlagern und zueinander in Konkurrenz treten.

7. Stunde. Das Konzept dieser Stunde ist dem der vorangehenden Stunde ähnlich. Bei der Besprechung der Hausaufgabe ergab sich das Problem, dass der Schüler, der seine Lösung an der Tafel vortrug, übersehen hatte, dass nicht nach “genau 18 funktionierenden Schaltern”, sondern nach “mindestens 18 funktionierenden Schaltern” gefragt worden war. Durch einen Hinweis aus der Klasse wurde dies aber erkannt und korrigiert. Danach sammelte ich die selbst erfundenen Aufgaben ein.

Im zentralen Teil der Stunde sollten wieder in Partner- bzw. Gruppenarbeit Anweisungen zum GTR bearbeitet werden. Nun standen Wertetabellen und Schaubilder im Vordergrund.

Anweisungen zum GTR in der Stochastik, Teil 2:

1. *Wertetabelle und Schaubild zu Binomialkoeffizienten.* Erstelle zunächst eine Liste `L1` der ganzen Zahlen $0, 1, \ldots, 20$ durch direkte Aufzählung. Eleganter kann man diese erzeugen mit $\boxed{\texttt{2nd}}$ $\boxed{\texttt{LIST}}$ $\boxed{\texttt{OPS}}$ $\boxed{\texttt{5: seq(}}$ und dann $\boxed{\text{seq}(X, X, 0, 20)}$ $\boxed{\texttt{ENTER}}$. Hierbei ist das erste Argument von `seq` ein Rechenausdruck (hier X) des zweiten Arguments, das zweite Argument ist die Variable (hier X), das dritte Argument ist der Anfangswert der Variable (hier 0), das vierte Argument ist der Endwert der Variable (hier 20).

   Man erhält $\longrightarrow \{0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad 20\}$, was in `L1` abgespeichert wird mit der Befehlsfolge $\boxed{\texttt{STO}}$ $\longrightarrow$ Ans $\longrightarrow$ $\boxed{\texttt{2nd}}$ $\boxed{\texttt{L1}}$ $\boxed{\texttt{ENTER}}$.

   Nun erzeugt man ganz ähnlich eine Liste mit den Werten von Binomialkoeffizienten durch $\boxed{\texttt{2nd}}$ $\boxed{\texttt{LIST}}$ $\boxed{\texttt{OPS}}$ $\boxed{\texttt{5: seq(}}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\text{seq(20 nCr } X, X, 0, 20)}$ $\boxed{\texttt{ENTER}}$

   $\longrightarrow \{\binom{20}{0} \quad \binom{20}{1} \quad \binom{20}{2} \quad \ldots \quad \binom{20}{20}\}$, was ganz analog in L2 abgespeichert wird.

   Die Wertetabelle kann man nun ansehen mittels $\boxed{\texttt{STAT}}$ $\boxed{\texttt{1: EDIT}}$ $\boxed{\texttt{ENTER}}$. Das zugehörige Schaubild erhält man mit $\boxed{\texttt{GRAPH}}$ sowie $\boxed{\texttt{ZOOM}}$ $\boxed{\texttt{9:ZOOMSTAT}}$.

2. *Wertetabelle und Schaubild zur Binomialverteilung* $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Wir wählen beispielsweise $n = 20$ und $p = 0.4$. **Kurzform** (siehe oben für Details):

   - `seq`$(X, X, 0, 20)$ $\longrightarrow$ `L1`

- `binompdf`$(20, 0.4)$ $\longrightarrow$ `L2`

Die Anzeige erfolgt wieder mit $\boxed{\texttt{STAT}}$ $\boxed{\texttt{1: EDIT}}$ $\boxed{\texttt{ENTER}}$ und dann $\boxed{\texttt{GRAPH}}$ sowie eventuell dem Zusatz $\boxed{\texttt{ZOOM}}$ $\boxed{\texttt{9:ZOOMSTAT}}$.

Achtung: Wählt man für `L1` eine Teilliste, so ist auch bei der Verteilungsfunktion eine entsprechende Teilliste zu erzeugen.

3. *Wertetabelle und Schaubild zur kumulativen Verteilungsfunktion* $\mathbb{P}(X \leq k)$ für das Beispiel $n = 20$ und $p = 0.4$: $\boxed{\texttt{2nd}}$ $\boxed{\texttt{DISTR}}$ `binomcdf`$(20, 0.4) \longrightarrow$ `L2`.

   Die Anzeige erfolgt dann wie oben beschrieben.

Als **Zusatzaufgabe** für diejenigen, die die Anweisungen rasch bearbeitet hatten, stellte ich die folgende *offenere Aufgabe*:

> Erzeuge die Schaubilder zu $k \mapsto \mathbb{P}_{n;p}(X \leq k)$ für festes n und verschiedene Werte von p wie $p = 0.3$, $p = 0.4$, $p = 0.5$, $p = 0.6$ im Display. Hierzu sind die Werte der kumulativen Verteilungsfunktionen für verschiedene Trefferwahrscheinlichkeiten p in den Speichern L2, L3, L4, L5 abzulegen. Welche interessante Beobachtung kann man dabei machen?

Für die verbleibenden 10 Minuten gab ich ein Aufgabenblatt mit 4 Aufgabentypen aus, die in den Folgestunden zu bearbeiten waren:

Aufgabe A. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Bernoulli-Kette der Länge $n = 175$ mit Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0.42$

(a) mindestens 82 Treffer

(b) mindestens 67 und zugleich höchstens 80 Treffer

(c) weniger als 65 oder mehr als 83 Treffer

auftreten.

Aufgabe B. Bei der Produktion von Computerchips ist ein Chip mit der Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ fehlerfrei. Wie groß muss p mindestens sein, wenn von 50 Chips mit (mindestens) 80% Wahrscheinlichkeit mindestens 35 fehlerfrei sein sollen.

Aufgabe C. Von den 100 Mitarbeitern eines Betriebes kommen im Schnitt 40% mit ihrem Auto zur Arbeit.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit genügt ein Parkplatz mit 50 (bzw. 55) Plätzen?

(b) Wie viele Plätze müsste der Parkplatz mindestens haben, damit diese mit einer Wahrscheinlichkeit von (mindestens) 90% ausreichen?

Aufgabe D. Kassandra behauptet, hellseherische Fähigkeiten zu besitzen. Um dies zu überprüfen, wird sie einem wiederholt durchgeführten Test unterzogen, bei dem sie unter fünf möglichen Farben die zufällig ausgewählte Farbe vorhersagen soll. Vorausgesetzt Kassandra rät lediglich, wie oft muss das Experiment mindestens durchgeführt werden, damit Kassandra mit (mindestens) 90% Wahrscheinlichkeit

(a) mindestens einen

(b) mindestens fünf

Treffer erzielt?

Die Schülerinnen und Schüler erhielten zusätzlich eine schriftliche Anweisung für die Bearbeitung von Folgen mit Hilfe des GTR, die sie als Hausarbeit lesen sollten.

Bis zum Schluss der Stunde sollten die Schülerinnen und Schüler in Partnerarbeit Aufgabe A bearbeiten. Ich gab dabei vereinzelt Hilfestellung. Als Hausaufgabe sollte Aufgabe A vollständig bearbeitet und die restlichen Aufgaben durchgelesen werden.

Analyse. Der Flüchtigkeitsfehler, der bei der Besprechung der Hausaufgabe auftrat, erwies sich als lehrreich. Auf diese Weise wurde das Problem für alle klar sichtbar, und es konnten noch einmal klar die Ereignisse $X = 18$ und $X \geq 18$ unterschieden werden. Überraschend war der großartige Rücklauf bei den selbst erfundenen Aufgaben. Ich erstellte aus diesen Aufgaben und etwa drei von mir ergänzten Aufgaben eine kleine Beispielsammlung. Diese Vorgehensweise kam bei der Klasse sehr gut an, da sie sich mit ihren Aufgaben identifizieren konnten. Teilweise waren geringfügige Überarbeitungen erforderlich, auf die ich in einer Folgestunde kurz einging.

Der zweite Teil der Anweisungen zum GTR verlief in ebenso konzentrierter Arbeitsatmosphäre wie der erste Teil. Das unterschiedliche Arbeitstempo der einzelnen Schülergruppen erwies sich aufgrund der Zusatzaufgabe als unproblematisch. Tatsächlich war ich von der Leistung einiger Schüler bei der Bearbeitung der Zusatzaufgabe sehr überrascht.

Bei der Teilaufgabe (a) des Aufgabentyps A ergaben sich keine Probleme. Als bedeutend schwieriger erwiesen sich erwartungsgemäß die Teile (b), (c), da hier die logischen Verknüpfungen "und" sowie "oder" erkannt und richtig verarbeitet werden mussten. Dies erforderte bei der Besprechung der Aufgaben an der Tafel zusätzliche Erklärungen, für die wieder Darstellungen wie in [8, S. 16] hilfreich waren. Diese Problematik musste auch im Folgenden immer wieder betont werden. Eine konzeptionelle Übersicht (Concept Map) zu den vier Aufgabentypen wird in Anhang B gegeben.

8. Stunde. Zunächst erfolgte eine kurze Besprechung (nicht Lösung) der von der Klasse formulierten Aufgaben und eine Prämierung der drei originellsten Aufgaben. Bestimmendes Thema der Stunde war die Bearbeitung der vier Aufgabentypen A – D. Während Typ A nahtlos an die besprochenen Themen anschließt, sind die restlichen drei Aufgabentypen deutlich komplexer, da nun auch funktionale Abhängigkeiten zu betrachten sind. Es werden teilweise "stochastische Optimierungsprobleme" betrachtet, für welche der optimale Wert eines der Parameter n, p, k der kumulativen Verteilungsfunktion $\mathbb{P}_{n;p}(X \leq k)$ mit einer binomialverteilten Zufallsvariable X bestimmt werden muss. Das gelingt in der Regel nur mit Hilfe des GTR, erfordert jedoch zusätzliche gedankliche Vorarbeit. Aufgrund dieser Schwierigkeiten stellte ich den Schülerinnen und Schülern zu allen Aufgaben Lösungsskizzen zur Verfügung. Die ausgewählten Aufgabentypen stammen dabei vorwiegend aus [8], [5]. Im Hinblick auf die erwartete längere Unterbrechung durch Herbstferien und Comenius-Projekt stellte ich den Schülerinnen und Schülern Langzeitaufgaben, deren Bearbeitung freiwillig war. Ich erklärte mich jedoch bereit, die abgegebenen Aufgaben zu korrigieren und gegebenenfalls positiv zu vermerken. Tatsächlich nahm ein großer Teil der Klasse dieses Angebot an.

4.3 Phase 2: Erwartungswert

9. Stunde. Aufgrund des Comenius-Projekts am MSG war ein großer Teil der Klasse abwesend (obwohl die Gastklasse der Klasse 11 a erst die folgende Woche eintraf). Ich gab daher den anwesenden Schülerinnen und Schülern anhand einer Mind Map einen Überblick zum Thema Stochastik in der Schule. Den übrigen Teil der Stunde befassten wir uns mit Übungen, insbesondere nochmals mit den vier Aufgabentypen der 8. Stunde.

Lernziele der folgenden drei Unterrichtsstunden: Die Schülerinnen und Schüler sollen

- den Erwartungswert einer Zufallsvariable als einen (theoretischen) Mittelwert bei häufiger Versuchswiederholung erfahren.
- Erwartungswerte einer diskreten Zufallsvariable in einfachen Situationen ausrechnen und interpretieren können.
- die allgemeine Definition des Erwartungswerts verstehen und Spezialfälle dieser unterordnen können.
- im Fall einer binomialverteilten Zufallsvariable die einfache Formel zur Berechnung des Erwartungswerts kennen und verstehen, wie die Parameter n und p anschaulich in diese eingehen.

10. Stunde. Zu Stundenbeginn wurde ich von den Klassensprecherinnen um 10 Minuten gebeten, um auf Planungsänderungen aufgrund des anstehenden Besuchs einer Gastklasse aus Dänemark in der kommenden Woche eingehen zu können. Da ich die Stunde mit einem Würfelexperiment zur Einführung des Erwartungswertes beginnen wollte, stimmte ich unter dem Vorbehalt zu, dass das Zufallsexperiment nebenbei ausgeführt würde. Dazu gab ich 10 Würfel an verschiedene Schülerinnen und Schüler aus (es bestand reges Interesse, aktiv am Experiment teilzunehmen). Jeder sollte 20 mal würfeln und dabei die Augenzahl notieren. Auf diese Weise lagen nach kurzer Zeit 200 Daten (Ziffern) vor, die wir an der Tafel tabellarisch ordneten:

Augenzahl:	1	2	3	4	5	6
abs. Häufigkeit:	29	21	38	37	35	40
rel. Häufigkeit:	0.134	0.105	0.19	0.185	0.175	0.2

Es folgte eine kurze wiederholende Diskussion über den Zugang zu Wahrscheinlichkeiten mittels relativer Häufigkeiten. Eine Schülerin brachte sehr klar zum Ausdruck, dass bei einer Datenmenge von diesem Umfang noch keine “Konvergenz” beobachtet werden kann, dass in der Tat sogar bei beliebig langer endlicher Zufallsziffernfolge immer wieder Schwankungen auftreten werden.

Dann stellte ich die Frage, welcher Augenzahl-Wert sich im Mittel (auf lange Sicht) ergeben wird, wenn man den Würfel sehr oft wirft. In dieser Formulierung konnte die

Klasse die Frage nicht beantworten. Daher schlug ich vor, die gewürfelte Augenzahl als Auszahlungsbetrag bei einem Glücksspiel anzusehen. Gefragt war jetzt nach dem mittleren Gewinn bei vielen Spielwiederholungen. Daraufhin schlug ein Schüler (Marius) sofort $(1 + 6)/2 = 3.5$ vor. Ich verwies darauf, dass dies im konkreten Fall richtig ist, dabei aber die spezielle Symmetrie der Situation wesentlich eingeht. Andererseits kamen wir mit der Glücksspiel-Interpretation auch zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{200}\left(h(1)\cdot 1 + h(2)\cdot 2 + \ldots + h(6)\cdot 6\right) &= \frac{h(1)}{200}\cdot 1 + \frac{h(2)}{200}\cdot 2 + \ldots + \frac{h(6)}{200}\cdot 6 \\ &\approx \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \ldots + \frac{1}{6}\cdot 6 \\ &= \frac{1+2+\ldots+6}{6} = 3.5\,. \end{aligned}$$

Hier ist $h(1)$ die Häufigkeit der Ziffer 1, etc. Dies motivierte schließlich, den theoretischen Mittelwert (Erwartungswert)

$$EW = 1\cdot\mathbb{P}(X=1) + 2\cdot\mathbb{P}(X=2) + \ldots + 6\cdot\mathbb{P}(X=6) \tag{3}$$

zu betrachten, wobei hier die Zufallsvariable X die Augenzahl beim Würfelwurf bezeichnet.

Abschließend schlug ich ein anderes Glücksspiel vor, bei dem gleichzeitig drei verschiedene faire Münzen geworfen und die Anzahl von "Kopf" gezählt werden sollte (als Auszahlungsbetrag in Euro). Hierzu erstellten wir die Tabelle

Anzahl Kopf	0	1	2	3
Wahrscheinlichkeit	1/8	3/8	3/8	1/8

Gerald hatte sofort die Vorstellung (aufgrund der vorliegenden Symmetrie), dass der Mittelwert auf lange Sicht nun 1.5 sein sollte. Er konnte aber spontan keine Prognose für den Fall $p \neq 0.5$ abgeben. Stattdessen testeten wir zum Vergleich unseren Ansatz (3), der Geralds Einsicht bestätigte. Als Hausaufgabe sollte der Fall $p = 0.2$ beim dreimaligen Münzwurf untersucht werden.

Analyse. Zunächst war der Stundenbeginn etwas problematisch wegen der Verärgerung der Klasse über die Planungsänderung bei ihrem Austauschprogramm. Es erwies sich daher als Glücksfall, dass ich ohnehin das Würfelexperiment eingeplant hatte und sich dieses mit den anfänglichen Diskussionen vereinbaren lies. Die bei den einzelnen Schülerinnen und Schülern gewürfelten Augenzahlen wurden tatsächlich zunächst detailliert registriert. Dabei fielen beim Notieren der Einzelergebnisse an der Tafel durchaus Häufungen derselben Augenzahl auf, was aber an dieser Stelle nicht weiter vertieft wurde (vgl. dagegen [27], [30]). Sinnvoll war die Anbindung an die Thematik von Klasse 10, da der frequentistische Zugang zu Wahrscheinlichkeiten dort häufig verwendet wird und jetzt noch einmal problematisiert werden konnte, zumal wir nun im Prinzip einen axiomatischen Rahmen vorliegen hatten. Als lehrreich kann man die beobachtete starke Streuung der relativen Häufigkeiten ansehen. Dies legt nahe, dass nicht notwendigerweise eine Gleichverteilung (fairer Würfel) vorliegen muss und rechtfertigt damit die allgemeinere Formulierung (3).

Interessant war der Vorschlag von Marius, der sich sofort auf den Fall einer diskreten Zufallsvariable mit äquidistanten Werten unter einer Gleichverteilungsannahme erweitern lässt. Dass dies nicht ganz so speziell ist, wie ich zunächst unterstellt hatte, nahm Marius mit Genugtuung auf.

Bei der Formulierung von (3) hatte ich auf der linken Seite bewusst EW anstelle der genaueren Schreibweise $\mathbb{E}(X)$ notiert. Hier kann man natürlich anderer Meinung sein und gleich eine präzisere Formulierung einfordern. Mir schien die getroffene Entscheidung jedoch angemessen zu sein, da die Schülerinnen und Schüler zu diesem Zeitpunkt nur das eine konkrete Beispiel vor Augen hatten. Gleiches trifft auf die rechte Seite dieser Gleichung zu, die andererseits die Zufallsvariable enthält. Diese Inkonsequenz gestattete ich mir, da so zumindest die Struktur der rechten Seite, auf die es zunächst ankommt, deutlich wird.

11. Stunde. Ziel der Stunde war die Untersuchung des Erwartungswerts einer binomialverteilten Zufallsvariable. Zunächst wiederholte ich noch einmal unsere Analyse des dreifachen Münzwurfs mit $p = 0.5$, die zu $\mathbb{E}(X) = 1.5 = 3 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot 0.5$ führte, wobei $X =$“Anzahl Kopf” wieder als Gewinn gedeutet werden konnte. In diesem Zusammenhang gab ich die Bezeichnung $\mathbb{E}(X)$ anstelle des vageren EW an. Dann stellte eine Schülerin ihre Lösung der Hausaufgabe vor, indem sie die tabellarische Anordnung der Vorstunde vom symmetrischen auf den vorliegenden Fall $p = 0.2$ übertrug und diese parallel zu meinem Anschrieb mit dem korrekten Ergebnis $\mathbb{E}(X) = 0.6 = 3 \cdot 0.2$ entwickelte. Tatsächlich wurde diese Produktdarstellung auf meine Aufforderung hin, eine entsprechende Zerlegung wie oben anzugeben, erkannt. Die Vermutung $\mathbb{E}(X) = n \cdot 0.5$ im Fall $p = 0.5$ war den SchülerInnen für $n = 4, 5, \ldots$ sofort klar und sie äußerten auch schon die korrekte Beziehung im allgemeinen Fall. Um diese plausibel zu machen, hatte ich vorgeschlagen, darüber nachzudenken, wie sich eine Veränderung von p auf den Mittelwert auswirken würde.

Nun sollten die Schülerinnen und Schüler die im Raum stehende Vermutung für $n = 1, 2, 3$ und allgemeines $p \in [0, 1]$ durch konkrete Rechnung bestätigen. Hierfür gab ich zunächst 10 Minuten Zeit. In dieser Phase gab ich einzelnen Gruppen Hinweise. Dann trugen zwei Schüler(innen) die Fälle $n = 1$ bzw. $n = 2$ an der Tafel vor. Nun gab ich erneut Gelegenheit, den Fall $n = 3$ anzugehen. Eine Schülerin stellte dann den Ansatz an der Tafel vor, die noch erforderlichen Vereinfachungen führte ich schließlich an der Tafel selbst durch, indem ich einen weiteren Schüler dazu anleitete. Allgemein wurde nun festgehalten:

> Für eine Zufallsvariable X, welche die Werte $x_1, \ldots, x_m$ annimmt, ist der *Erwartungswert* von X erklärt als
>
> $$\mathbb{E}(X) = x_1 \cdot \mathbb{P}(X = x_1) + \ldots + x_m \cdot \mathbb{P}(X = x_m)\,.$$
>
> Dieser lässt sich deuten als der mittlere Gewinn, der sich bei vielen Wiederholungen eines Zufallsexperiments mit Auszahlung X ergibt. Ist X speziell eine *binomialverteilte Zufallsvariable* mit den Parametern n und p, so gilt $\mathbb{E}(X) = n \cdot p$.

Zur Veranschaulichung stellte ich mit Hilfe meines Notebooks eine Excel-Grafik vor, aus der man ersehen konnte, wie sich das Histogramm einer Binomialverteilung in

Abhängigkeit von n und p dynamisch verändert. Zudem konnten die Schülerinnen und Schüler die Lage des Erwartungswerts in der Nähe des Maximums der Binomialverteilung ebenso erkennen wie die näherungsweise Glockenform für große Werte von n und (zumindest) für $p = 0.5$.

Als Hausaufgabe sollte das Beispiel des dreifachen Münzwurfs durch das dreifache Drehen von Farbscheiben modifiziert werden, bei denen man jeweils mit Wahrscheinlichkeit $2/3$ die Farbe gelb erhält. "Anzahl gelb" in Euro sollte der Auszahlungsbetrag sein, zusätzlich war ein Einsatz von 2 Euro zu entrichten. Die Schülerinnen und Schüler sollten entscheiden, ob sie an dem Spiel teilnehmen würden. Ferner sollten sie herausfinden, auf welche Weise man durch Veränderung der Rahmenbedingungen den Spielanreiz erhöhen könnte.

Analyse. Die Stunde verlief in einer sehr konzentrierten und arbeitsintensiven Atmosphäre. Im Rahmen der allgemeinen Diskussion hatten die Schülerinnen und Schüler keine Probleme. Deutliche Leistungsunterschiede traten aber bei der Ausführung des Arbeitsauftrags auf. Während einigen Schüler(innen) der richtige Ansatz Mühe bereitete, fiel es den meisten Schüler(innen) zunächst schwer, mit dem allgemeinen Parameter p im Fall $n = 3$ zu rechnen. Mit der Besprechung der Fälle $n = 1, 2$ wollte ich wieder möglichst die ganze Klasse auf den selben Stand bringen, um danach einen erneuten Versuch zu ermöglichen. Interessant war in diesem Zusammenhang, dass viele Schülerinnen und Schüler mit Hilfe eines Baumdiagramms einen rechnerischen Ansatz ableiteten.

Sehr gut wurde auch die Veranschaulichung mit Hilfe der Excel-Grafik aufgenommen. Hier zeigen sich natürlich Vorteile gegenüber dem begrenzten Display des TI-83. Bei Vorliegen anderer Rahmenbedingungen wäre ein Excel-Praktikum im Anschluss an diese Woche eine ideale Ergänzung gewesen.

12. Stunde. Zunächst hielt ein Schüler ein Referat über die Berechnung von Binomialkoeffizienten durch geeignete Programmierung des GTR. Als Grundlage diente ihm neben seinen eigenen Überlegungen eine Skizze zur rekursiven (multiplikativen) Berechnung der Binomialkoeffizienten, die ich ihm zur Verfügung gestellt hatte. Es folgte die Besprechung der Hausaufgabe. Auf einen Schülerwunsch hin ging ich noch einmal auf die allgemeine Definition des Erwartungswerts ein und erläuterte, wie man die Formel für den Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariable aus der Additivität des Erwartungswerts ableiten kann. Der restliche Teil der Stunde war Übungen zum Erwartungswert anhand des Schulbuchs gewidmet.

4.4 Phase 3: Hypothesentest

13. Stunde. Nach der erneuten Unterbrechung durch das Comenius-Projekt sammelte ich die Langzeitaufgaben ein und stellte zugleich die von mir entwickelten Mind Maps und eine Concept Map vor. Auf diese Weise konnte ich zugleich die Wiederholung gestalten. Um die Schülerinnen und Schüler zu aktivieren, stellte ich eine etwas komplexere Aufgabe, zu deren Lösung die Berechnung eines Erwartungswerts mit der Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses zu kombinieren war. Gegen Ende der Stunde kündigte ich die neue Thematik für die kommenden Stunden an und illustrierte diese an einer fiktiven Geschichte (Indizienkette) zum Thema "Fahren ohne Führerschein".

Lernziele der folgenden drei Unterrichtsstunden: Die Schülerinnen und Schüler sollen

- die Idee eines statistischen Hypothesentests erfassen und Analogien in anderen Lebensbereichen erkennen.
- in konkreten Beispielen sinnvolle Entscheidungsregeln beim Testen von (zusammengesetzten) Hypothesen formulieren können.
- in anwendungsorientierten Beispielen im Zusammenhang mit dem Hypothesentesten bei Bernoulli-Ketten einen Ablehnungsbereich mit Hilfe eines GTR berechnen können.
- mögliche Fehler beim Testen von Hypothesen kennen und interpretieren können.
- einen konkreten statistischen Hypothesentest planen und praktisch umsetzen können.

14. Stunde. Zum Einstieg in das *Testen von Hypothesen* wählte ich das folgende konkrete Beispiel (modifiziert nach [10, S. 137]), das ich in Kurzform an die Tafel schrieb:

> Aufgrund langjähriger Erfahrung ist bekannt, dass die Therapie für eine bestimmte Krankheit eine Erfolgswahrscheinlichkeit von 50 % hat. Eine neue, von einer Forschergruppe entwickelte Therapie verspricht aufgrund von theoretischen Überlegungen und Vorstudien eine erhöhte Erfolgswahrscheinlichkeit. Um dies genauer beurteilen zu können, soll ein Test mit 100 Patienten durchgeführt werden, die an der Krankheit leiden und die mit der neuen Therapie behandelt werden. Aufgrund des Testergebnisses soll dann eine Entscheidung über die Qualität der neuen Therapie getroffen werden.

Die Problemstellung wurde sofort verstanden. Allerdings gab es auch keine Diskussionen etwa über die Größe der Testgruppe. Dann fragte ich einzelne Schüler, wie sie die Qualität der neuen Therapie im Vergleich zur bisherigen Therapie beurteilen würden, falls 90; 20; 80; 30; etc. Personen geheilt würden. Zunächst war die Antwort offensichtlich (?), je näher wir jedoch der "magischen Grenze 50" kamen, desto zögerlicher war die Antwort. Es war den Schülern selbstverständlich klar, auch aufgrund früherer Überlegungen, dass selbst bei mindestens 60 oder bei weniger als 40 geheilten Patienten keine definitive Aussage über die Qualität der neuen Therapie möglich ist. Andererseits würde man es bei 70 geheilten Patienten doch als sehr unwahrscheinlich ansehen, dass die neue Therapie schlechter als die bisherige ist.

In Analogie zur fiktiven Geschichte der vorangehenden Stunde formulierte ich nun als

> *Hypothese* (*Nullhypothese*)
>
> H_0: "die neue Therapie ist lediglich genau so gut wie die bisherige".
>
> Wird die Heilungswahrscheinlichkeit mit p bezeichnet, so schreibt man kürzer
>
> $$H_0 : p = 0.5\,.$$

Die *Gegenhypothese*

$$H_1 : p > 0.5$$

ist das, was die Forschergruppe eigentlich gern bestätigen würde. Man geht hierbei davon aus, dass die neue Therapie zumindest nicht schlechter als die bisherige ist.

Dann stellte ich die entscheidende Frage:

Ab wie vielen geheilten Patienten sollte man sich gegen die Hypothese H_0 *entscheiden?*

Zunächst nahmen wir an (Modellwahl), dass sich der Test mit 100 Patienten als Bernoulli-Kette der Länge 100 mit fester, uns jedoch unbekannter Trefferwahrscheinlichkeit p beschreiben lässt. Dann bezeichneten wir wie bisher die (zufällige) Anzahl der geheilten Patienten mit X, wobei Heilung als Treffer angesehen wurde. Aufgrund der Kenntnis einer Realisierung von X war nun eine vernünftige Aussage über p zu treffen. Unsere naheliegende (aber keinesfalls zwingende) Entscheidungsregel lautete, $H_0 : p = 0.5$ abzulehnen und damit $H_1 : p > 0.5$ anzunehmen, wenn das Testergebnis $X \geq k_0$ mit einer hinreichend großen Zahl $k_0 \geq 100 \cdot 0.5 = 50$ eintritt, andernfalls jedoch H_0 nicht zu verwerfen.

Um eine konkrete Schranke k_0 zu erhalten, stellte ich explizit die Aufgabe, die Zahl $k_0 \in \{0; 1; \ldots ; 100\}$ so zu bestimmen, dass im Fall der Gültigkeit von $H_0 : p = 0.5$ eine fehlerhafte Entscheidung für H_1 eine kleine Wahrscheinlichkeit besitzt, etwa höchstens $0.05 = 5\%$. Da die Entscheidung für H_1 genau dann getroffen wird, wenn $X \geq k_0$ gilt, ist also eine Zahl $k_0 \in \{0; 1; \ldots ; 100\}$ zu ermitteln, für die

$$\mathbb{P}_{100;0.5}(X \geq k_0) \leq 0.05 \tag{4}$$

erfüllt ist. Nur wenn wir $H_0 : p = 0.5$ annehmen, ist dieser explizite Ansatz möglich. Natürlich könnte man auch gleich $H_0 : p \leq 0.5$ schreiben, ohne dass sich am Ergebnis und in der Vorgehensweise etwas ändert. Die erforderliche Zusatzüberlegung wollte ich aber erst in der Folgestunde andeuten. Die selbsterklärende Indizierung von $\mathbb{P}$ hatte ich zuvor schon bei der Besprechung der Aufgabentypen B – D eingeführt.

An dieser Stelle sollten die Schülerinnen und Schüler versuchen, eigenständig mögliche Werte für k_0 zu bestimmen. So wie die Aufgabe formuliert war, hätte jede Zahl $k_0 \geq 59$ eine korrekte Lösung dargestellt. Tatsächlich gelang es einem Teil der Klasse, mit zusätzlicher Hilfe dann einem überwiegenden Teil, das Ergebnis zu finden. Hierbei erwiesen sich die Erfahrungen als nützlich, die bei der Lösung der Aufgabentypen A – D gesammelt wurden. Ferner konnte noch einmal das Aufstellen einer Wertetabelle mit dem GTR eingeübt werden.

Zusammenfassung des Beispiels:

Gegeben: Testproblem mit vorliegender Hypothese $H_0 : p = 0.5$ und Gegenhypothese $H_1 : p > 0.5$, Testumfang $n = 100$ und *Irrtumswahrscheinlichkeit* $\alpha = 0.05$.

Entscheidungsregel: H_0 ist zugunsten von H_1 abzulehnen, falls das Testergebnis $X \geq 59$ vorliegt. Man nennt $K = \{59; 60; \ldots ; 100\}$ den *Ablehnungsbereich* des betrachteten Tests.

Interpretation: Im Rahmen der vorgegebenen 5-prozentigen Irrtumswahrscheinlichkeit ist die Hypothese H_0 als unvereinbar mit einem Testergebnis $X \in K$ anzusehen.

Zur Vertiefung sollten die SchülerInnen das zweite Beispiele in [8, S. 48] bzw. [5, S. 168] durcharbeiten, das ich in Form eines Arbeitsblatts vorbereitet hatte.

Analyse. Der Einstieg über die konkrete Fragestellung, auf die ich schon zu Beginn der Einheit hingewiesen hatte, war geeignet gewählt. Natürlich wird ein solches Beispiel nicht bei allen Schülerinnen und Schülern auf gleich großes Interesse stoßen, andererseits war deutlich die Faszination eines Schülers zu bemerken, dessen Vater im Bereich der Krebsforschung arbeitet. Der Verlauf der Stunde insgesamt war sehr stark durch meine Steuerung geprägt, dennoch war die Vorgehensweise durch ein inhaltlich-anschauliches Argumentieren aus der Sicht der Schülerinnen und Schüler bestimmt. Dann fand allmählich ein Übergang zu einer konkret erwarteten Schülertätigkeit bei der Umsetzung des Verfahrens statt. Ein “fertiges Rezept” sollte in dieser Stunde ausschließlich in Form eines exemplarischen, vernünftigen Vorgehens vermittelt werden. Der beschriebene Sachverhalt führt in der Literatur immer wieder zu Vergleichen (und zu Kontroversen) mit einem Bayesschen Ansatz des Hypothesentestens. Dies würde in der Tat eine sinnvolle und spannende Fortführung der Einheit erlauben (vgl. [10, §7], [28], [32], [6]). Als Beispiel für den bisweilen sehr heftig geführten Disput kann [11] gelten.

Tatsächlich ist die beschrittene Methode des Hypothesentestens aus mathematischer Sicht keinesfalls zwingend, sie stellt nur eine von verschiedenen sinnvollen Methoden dar (allerdings vielleicht die derzeit am stärksten verbreitete Methode). In der hier beschriebenen Situation wird man diejenige Aussage als Gegenhypothese H_1 fixieren, die man eigentlich bestätigen möchte. Der Grund hierfür ist, dass man mit der vereinbarten Entscheidungsregel je nach Ausgang des Tests eine Ablehnung von H_0 erreichen kann. Da es sich um einen experimentellen Befund handelt, kann keine noch so häufige Wiederholung des Tests eine im deterministischen Sinn sichere Entscheidung ermöglichen. Die indirekte (oft ritualisierte) Vorgehensweise der Ablehnung von H_0 vermittelt jedoch einen gewissen Anschein von Objektivität und spiegelt wieder, dass eine naturwissenschaftliche Erkenntnis nie endgültig bestätigt, aber sehr wohl experimentell widerlegt werden kann. Da die Ablehnung (nicht Widerlegung) von H_0 aber an die Annahme von H_1 gekoppelt wird (und umgekehrt), erscheint dies eine Entscheidung auf sicherer Basis zu sein. Vereinfachend wirkt sich hier aus, dass durch H_0 und H_1 eine Zerlegung von $[0, 1]$ vorgegeben ist. Es sollte aber klar sein, dass egal wie man sich bei einem Test aufgrund der erhaltenen Beobachtungsdaten entscheidet, stets die Möglichkeit einer Fehlentscheidung gegeben ist (vgl. [16, S. 83], [13, Kapitel 4]). Dies wird noch deutlicher, wenn man z.B. den Test einer einfachen Hypothese gegen eine einfache (Alternativ-)Hypothese betrachtet.

Eine kleine technische Schwierigkeit für die Schülerinnen und Schüler stellte bei der Bestimmung des kleinstmöglichen Wertes für k_0 bei rechtsseitigen Tests der erforderliche Übergang zum Gegenereignis dar. Dies ist allein durch die beabsichtigte Anwendung des GTR bedingt. Eine etwas grundsätzlichere Beschreibung der optimalen Bestimmung von k_0 kann so formuliert werden: Jede Zahl $k_0 \in \mathbb{N}_0$, die (4) erfüllt, ergibt einen möglichen Ablehnungsbereich. Innerhalb dieses Wahlbereichs ist k_0 so festzulegen, dass der Ablehnungsbereich maximal wird, d.h. man wählt im Rahmen der gegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit den Ablehnungsbereich so groß wie möglich. Als Vorlage für die Entwicklung eines möglichen, stärker schülerorientierten Einstiegs könnte die Darstellung des Beispiels in [17, S. 393] dienen.

15. und 16. Stunde. Diese Doppelstunde sollte bis auf den anschließenden zweistündigen Übungsteil und die Klassenarbeit schon den Abschluss des Testens und (zumindest vorläufig) der Stochastik markieren. Zunächst war es sinnvoll, die Vorgehensweise der vergangenen Stunde im Unterrichtsgespräch nochmals aufzugreifen und an der Tafel (stichpunktartig) festzuhalten:

- Zu klären ist, ob das Modell einer Bernoulli-Kette angemessen ist. Gegebenenfalls ist die Länge der Kette festzuhalten, falls die Länge vorgegeben und nicht erst noch zu bestimmen oder geeignet zu wählen ist. Ferner ist festzulegen, was als Treffer anzusehen ist.

- Dann sind (Null)Hypothese $H_0 : p = 0.5$ und Gegenhypothese $H_1 : p > 0.5$ aufzustellen. [In unserem Fall war dies zunächst eine einfache Hypothese und eine zusammengesetzte Gegenhypothese. Hier erläuterte ich, dass sich nichts wesentliches ändert, wenn man von $H_0 : p \leq 0.5$ ausgeht.]

- Die Entscheidungsregel besagt, dass H_0 aufgrund des vorliegenden Testergebnisses – mit X als der Anzahl der Treffer – zu verwerfen ist, falls $X \geq k_0$ gilt. Dabei ist k_0 so groß zu wählen, dass bei Gültigkeit von H_0 eine Ablehnung von H_0 aufgrund der Entscheidungsregel höchstens eine vorgegebene, kleine *Irrtumswahrscheinlichkeit* (häufig zwischen 0.05 und 0.01) hat (*Fehler 1. Art*).

- Wählt man k_0 nicht als die kleinstmögliche Zahl, für die $\mathbb{P}_{100;0.5}(X \geq k_0) \leq \alpha$ gilt, so verkleinert man den Ablehnungsbereich unnötig. Dies führt aber dazu, dass man H_0 allzu oft beibehält, wenn tatsächlich H_1 gilt (*Fehler 2. Art*).

Diese Beschreibung war an das schon betrachtete Beispiel gekoppelt, allerdings nicht in der stark schematisierten Weise, die in [8] gewählt wird. Dann sollten die Schülerinnen und Schüler in Analogie zum hier betrachteten *rechtsseitigen Test* Beispiel 1 in [5, S. 168] erarbeiten, das einen *linksseitigen Test* beschreibt. Den Text hatte ich als Arbeitsblatt verfügbar gemacht. Abschließend wurden die Beispiele auf Seite 47 in [8] gemeinsam gelesen. Die Schülerinnen und Schüler wollten dann für eine konkrete Wahl einer Irrtumswahrscheinlichkeit den jeweiligen Ablehnungsbereich selbst bestimmen. Mit einem Excel-Arbeitsblatt (nach K. H. Strick) und meinem Notebook demonstrierte ich abschließend die Abhängigkeit des Ablehnungsbereichs von der gewählten Irrtumswahrscheinlichkeit.

Der Hauptteil der zweiten Hälfte dieser Doppelstunde bestand in der konkreten Ausführung eines Tests mit anschließender Auswertung. Dazu sollten sich die Schüler vorstellen, dass der Vertreter für ein Schweizer Gebirgswasser behauptet, dass mindestens 50 % der Kunden das Gebirgswasser gewöhnlichem Leitungswasser vorziehen würden. Der Filialleiter ist skeptisch und geht davon aus, dass seine Kundschaft an den Genuss von Leitungswasser gewöhnt ist und dieses sogar vorzieht. Die Schüler sollten hierzu einen Selbsttest durchführen.

Ausführung. Jeder Schüler erhielt zwei Becher. In einem befand sich Breisacher Leitungswasser, im anderen war Schweizer Gebirgswasser. Die Aufgabe bestand darin, den Becher zu benennen, dessen Inhalt besser schmeckte. Da nur 26 Schüler anwesend waren, lag eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 26$ vor. Wurde das Schweizer Gebirgswasser als das geschmacklich bessere Wasser gewählt, so wurde dies als Treffer notiert. Ich hatte zuvor eine "unsichtbare" Kennzeichnung des Bechers mit dem Schweizer Gebirgswasser vorgenommen und die Klasse ermahnt, sich nicht untereinander zu beraten, um die Unabhängigkeit der Entscheidung zu gewährleisten. Zur Testanalyse wurden zwei unterschiedliche Positionen eingenommen:

Position 1, welche die Klasse einnahm, ist die des Vertreters. Als Hypothesen über die Trefferwahrscheinlichkeit p erhalten wir dann $H_0 : p \geq 0.5$, als Gegenhypothese $H_1 : p < 0.5$. Um den Ablehnungsbereich bei der üblichen Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ zu bestimmen, ist also k_0 möglichst groß zu wählen, so dass $\mathbb{P}_{26;0.5}(X \leq k_0) \leq 0.05$. Im konkreten Fall ergibt sich durch systematisches Probieren oder durch Erstellen einer Wertetabelle $k_0 = 8$. Man erhält also den Ablehnungsbereich $K = \{0; 1; \ldots; 8\}$. Da tatsächlich 14 Schüler das Schweizer Gebirgswasser als das bessere Wasser benannten, würde sich der Handelsvertreter bestätigt fühlen.

Position 2, welche ich nahelegte, ist die des Filialleiters. Als Hypothese über die Trefferwahrscheinlichkeit p wählt man jetzt $H_0 : p \leq 0.5$, als Gegenhypothese $H_1 : p > 0.5$. Um den Ablehnungsbereich bei der üblichen Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ zu bestimmen, ist also k_1 möglichst klein zu wählen, so dass $\mathbb{P}_{26;0.5}(X \geq k_1) \leq 0.05$. Man findet $k_1 = 18$ und damit den Ablehnungsbereich $K = \{18; 19; \ldots; 26\}$. Auch der Filialleiter sieht sich bei gleichem Testergebnis bestätigt.

Es zeigt sich somit der entscheidende Einfluss der Wahl der Nullhypothese. Handelsvertreter und Filialleiter kommen bei gleichen Testdaten zu gegensätzlichen Ergebnissen. Somit bringt der Vergleich deutlich den subjektiven Charakter der Vorgehensweise zum Ausdruck. Hierauf wurde in einer kurzen Diskussion abschließend eingegangen.

Analyse. Die reale Durchführung des Tests wurde bei den SchülerInnen sehr gut aufgenommen und war im Vorfeld der Aktion aufgrund meiner Ankündigung schon mit Spannung erwartet worden. Das Verfahren wurde auch sehr ernsthaft durchgeführt. Natürlich ist die reale Situation durchaus komplex und sehr sensibel gegenüber einer Modifikation der Fragestellung. Die Schülerinnen und Schüler waren durch die Kombination von inhaltlicher Argumentation, expliziter Berechnung, Einsatz des GTR sowie abschließender Wertung extrem gefordert. Am Ende einer solchen Argumentationskette ist dann sicherlich nicht immer sofort klar, wie nun eigentlich das Ergebnis zu interpretieren ist. Dies wird besonders deutlich durch die Möglichkeit, verschiedene Positionen einzunehmen und dabei zu entgegengesetzten Ergebnissen zu gelangen. Ein weiteres ausführlich diskutiertes Beispiel enthält [29, S. 252/253]. Es zeigt sich ferner, wie schwierig es für die Gegenhypothese sein kann, sich gegen die Hypothese durchzusetzen. Hier waren zusätzliche Erklärungen und Hinweise erforderlich. Interessant wäre in diesem Zusammenhang die spekulative Zusatzfrage gewesen, welche Position bei diesem Test ein verantwortungsvoller Wissenschaftler eingenommen hätte.

Trotz der prinzipiellen Schwierigkeit des Themas wurden aber immer wieder sehr gute Fragen gestellt, z.B. nach der optimalen Wahl von k_0 bzw. k_1 in obigem Beispiel. Auf diese Weise konnte der Fehler 2. Art inhaltlich besprochen werden, ohne die entsprechende Terminologie formal einzuführen. Bei der Frage, warum man bei der Nullhypothese $H_0 : p \geq 0.5$ dennoch mit $p = 0.5$ rechnen kann, um den Fehler 1. Art abzuschätzen, scheint es zu weit zu führen, formal mit der Ungleichungskette

$$\mathbb{P}_{26;p}(X \leq k_0) \leq \mathbb{P}_{26;0.5}(X \leq k_0) \leq 0.05$$

zu argumentieren. Stattdessen bietet es sich an, einfach anschaulich darauf zu verweisen, dass mit zunehmender Trefferwahrscheinlichkeit die Wahrscheinlichkeit dafür abnimmt, dass die Gesamtzahl der Treffer unter einer gegebenen Schranke liegt. Ein Beweis wird in [22, S. 231] gegeben.

Das Testen von Hypothesen ist eine weit verbreitete Methode mit zahlreichen Varianten. Hier habe ich mich bewusst auf einige wenige Situationen konzentriert. Wesentlich scheint mir die Idee der Methode zu sein (vgl. [31, S. 66]), die rechnerische Umsetzung wird mit Hilfe des GTR eher zur Nebensache. Ist die Grundidee einmal verstanden, ist es nicht nötig, Prozeduren als Kochrezepte auswendig zu lernen. Im Gegenteil wird gerade ein unreflektierter Automatismus dazu verleiten, die spezielle Situation nicht ausreichend zu beachten. Einige warnende und instruktive Beispiele hierzu findet man in [10, S. 154/155], [6]. Eine prägnante Beschreibung des statistischen Testens wird in [31, S. 65–76] und [9, S. 337–360] gegeben.

17. und 18. Stunde. In diesen beiden Stunden wurden systematisch die bisherigen Themen der Einheit anhand von ausgewählten Aufgaben nochmals angesprochen. Insbesondere erfolgte eine weitere Analyse eines Hypothesentests aus zwei verschiedenen Perspektiven (Beispiel in [3, S. 54/55]).

5 Rück- und Ausblick

Das Thema Stochastik in der 11. Klasse bietet eine Reihe inhaltlicher und didaktischer Möglichkeiten, die mit bestimmend für die Wahl des Themas der Dokumentation waren. Zunächst aber bringt diese Entscheidung eine persönliche Begeisterung und Überzeugung zum Ausdruck, die von der Klasse wahrgenommen wurde und damit Grundlage für eine lebendige Unterrichtsatmosphäre war. Dabei stellte das Thema zugleich Gegengewicht, Ergänzung und Anwendung von klassischen Inhalten und Methoden der Analysis dar.

Eigentlich alle Schüler nahmen den Wechsel von den Grundlagen der Analysis zur Stochastik gut auf. Im Rückblick ergab sich der Eindruck, dass die Klasse gereift und zusätzlich motiviert aus der Stochastik hervorgegangen ist und die Themen aus der Anfangsphase des Analysisunterrichts nach kurzer Wiederholung besser als zuvor verarbeitet hatte. Dies ist besonders erfreulich, da die durch Herbstferien und den Besuch einer Gastklasse aus Dänemark (mit den damit verbundenen Turbulenzen) verursachten Unterbrechungen eine zusätzliche Schwierigkeit im Hinblick auf die Kontinuität des Lernprozesses darstellten. Hier erwiesen sich eventuell die von mir vorgeschlagenen Langzeitaufgaben und das Angebot der Korrektur zusätzlicher eigener Aufgabenbeiträge als ein nützliches Instrument, um den gedanklichen Zusammenhalt zu sichern. Wichtig ist, dass hierbei lediglich eine Benotung in Form einer positiven inhaltlichen Würdigung stattfand.

Mit den aufgewandten 21 Stunden ist das Kontingent der Stochastik in Klasse 11 nicht aufgebraucht. Es besteht daher eventuell die Möglichkeit, zum Schuljahresende noch einmal stochastische Themen aufzugreifen. Dies könnten fortgeschrittenere Themen der Statistik sein wie Maximum-Likelihood-Methode (Schätzen und Verbindung zur Maximumsbestimmung in der Analysis) oder Sequentialstatistik als Fortführung des Hypothesentestens (bei nicht fixiertem Testumfang), ferner bieten sich der Themenkomplex Varianz, Tschebyscheff-Ungleichung und Schätzen, bedingte Wahrscheinlichkeiten und Bayes-Statistik oder (exotischer) zufällige Graphen [14] an. Da aber mindestens drei Wochen des Schuljahres wegen diverser Projekte für den Mathematikunterricht wegfallen, bleibt zunächst der weitere Verlauf des Schuljahres abzuwarten.

Die Eindrücke aus den Schüleraktivitäten, der Klassenarbeit und den Ergebnissen einer schriftlichen Befragung (die Fragen der Auswertung finden sich im Anhang E) bestätigen die eigene positive Gesamteinschätzung. Die Befragung wurde etwa zwei Wochen nach Ende der Einheit durchgeführt und wurde von den Schülerinnen und Schülern als ungewöhnlich und anstrengend empfunden. Dies lag einerseits am beabsichtigten, zeitlichen Abstand (Erinnerung?), andererseits daran, dass die Schülerinnen und Schüler bei der Beantwortung der Fragen in hohem Umfang Stellung beziehen mussten und zu eigenen Überlegungen aufgefordert waren. Für die einzelnen Phasen ergab sich auszugsweise das folgende Bild:

1. Bernoulli-Ketten und Binomialverteilung wurden als ein nützliches und gut verständliches Modell zur Beschreibung realer Situationen erkannt. Die Verwendung des GTR in diesem Kontext empfanden die Schülerinnen und Schüler aufgrund der erforderlichen Befehlsfolgen zwar als teilweise kompliziert, ausnahmslos aber auch als hilfreich oder sogar unentbehrlich. Die Bearbeitung des Aufgabentyps A stellte keine Schwierigkeit dar, die Aufgabentypen B – D sind schon sehr anspruchsvoll und wurden entsprechend auch als schwierig gewertet. Die Ergebnisse der Klassenarbeit zeigen allerdings auch, dass spätestens nach der Vorbereitung der Klassenarbeit und eigenständiger Wiederholung ein gutes Ergebnis auf breiter Front erreicht wurde. Dieser Umstand fördert das Selbstvertrauen der Klasse und stellt einen positiven Impuls für die künftige Beschäftigung mit Mathematik dar. Insgesamt fühlte sich die Klasse gut auf die Arbeit vorbereitet, einige Schülerinnen und Schüler gaben an, dass der Unterricht anspruchsvoller als die Klassenarbeit war. Dies entspricht meiner persönlichen Einschätzung und Zielsetzung.

2. Erwartungswerte wurden von fast allen Schülerinnen und Schülern als sehr anschaulich und leicht verständlich eingeschätzt. Bis auf den Umstand, dass bei einigen Schülerinnen und Schülern der Erwartungswert auf den Kontext der Binomialverteilung verkürzt wurde, ist diese Einschätzung sicherlich zutreffend. Man

hätte der grundsätzlichen Bedeutung von Erwartungswerten durch zusätzliche Beispiele in allgemeinerem Rahmen begegnen können. Ein spannendes Thema hierzu könnte die Besprechung der Technik der “randomisierten Antworten” sein; dies wäre beispielsweise ein geeignetes Thema für einen Schülervortrag. Tatsächlich berührt die beobachtete Verkürzung ein prinzipielles Problem. Bis auf die Einstiegsphase der Unterrichtseinheit und den Einstieg in das Thema Erwartungswerte musste die Binomialverteilung die dominierende Modellannahme bleiben. Natürlich ist dies durch deren gute technische Handhabbarkeit und den zeitlichen Rahmen der Unterrichtseinheit begründet. (Hier sind auch andere Wege denkbar.) Aus praktischer Sicht kann dies aber kein überzeugendes Argument sein. Umgekehrt ergibt sich so ein weiteres Argument dafür, die Stochastik zu einem späteren Zeitpunkt erneut aufzugreifen, um dann andere Verteilungen mit eventuell unendlichem diskreten oder kontinuierlichem Grundraum zu behandeln.

3. Das sicherlich schwierigste Thema der Unterrichtseinheit stellte das Hypothesentesten dar. Ein Schüler schrieb hierzu treffend, dass man mehr machen müsse, als nur den GTR zu bedienen. Tatächlich ist auch hierbei der GTR ein wichtiges Hilfsmittel, entscheidend ist dagegen die gedankliche Vor- und Nacharbeit. Mehrere Schülerinnen und Schüler werteten die praktische Umsetzung des Gebirgswasser-Experiments als sehr hilfreich. Aus eigener Sicht stellte die Bearbeitung des Aufgabentyps C eine maßgeschneiderte Vorübung zur Ableitung des Entscheidungsverfahrens beim Testen dar. In diesem Zusammenhang könnte ich mir auch gut ergänzende Schülervorträge vorstellen, welche die Entwicklung und Anwendungen der Statistik in allgemeinerem Rahmen beschreiben oder konkreter wichtige, konzeptionelle Fragen aufgreifen. (Wie groß sollte der Testumfang sein? Wie können Gewinne und Verluste berücksichtigt werden, die mit fehlerhaften Entscheidungen verbunden sind? Wie beeinflusst dieser die Fehler 1. und 2. Art? Möglichkeiten, Grenzen, Fehlinterpretationen und Missbrauch statistischer Verfahren? Verbindung von Statistik und Computer!)

Insgesamt hielten die Schülerinnen und Schüler, die an der Befragung teilnahmen, die zur Verfügung gestellten Arbeitsmaterialien für ausreichend, abwechslungsreich und praxisnah, insbesondere wurde die Möglichkeit geschätzt, eigene Aufgaben beizusteuern. Allerdings ist klar, dass die Praxisnähe der Schulmathematik ebenso ihre Grenzen hat (vgl. [24]). Einige Schülerinnen und Schüler wünschten sich eine stärkere Verwendung des Schulbuches. Hier bietet sich zumindest als Kompromiss an, gelegentlich genauer auszuführen, welche Themen an welcher Stelle im Buch zu finden sind, um so die Hemmschwelle herabzusetzen, selbstständig ergänzend mit dem Buch zu arbeiten. Der Wechsel zwischen Einzel-, Partner- und Gruppenarbeit, gesteuertem Unterricht, Erklärungen durch Schüler und gezielter Wiederholung durch den Lehrer wurde geschätzt. In einem Fall wurde der Wunsch nach wechselnder Gruppenzusammenstellung geäußert und in einem anderen Fall die Effektivität von Partner- oder Gruppenarbeit ganz in Frage gestellt. Besonders erfreulich waren einzelne Antworten auf die Frage nach dem Verhältnis von Analysis und Stochastik. So wurde zum Ausdruck gebracht, dass man keine Trennlinie ziehen könne, andererseits wurden Gemeinsamkeiten festgehalten (Nutzung des GTR, Grafen und Wertetabellen, Untersuchung von Funktionen, Schnittbildung von Schaubildern) und die einheitliche

Behandlung beider Themenbereiche erkannt. Aus eigener Sicht schließlich konnten die übergeordneten Kompetenzbereiche Lernen (Begriffe und Regeln), Problemlösen, Anwenden und Modellieren, Beweisen und Begründen, Vernetzen und Kommunizieren in der Unterrichtseinheit angemessen inhaltlich repräsentiert und umgesetzt werden.

Literatur

[1] Arbeitskreis Stochastik. Empfehlungen zu Zielen und zur Gestaltung des Stochastikunterrichts. Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. Stochastik in der Schule **23** (2003), 21–26.

[2] D. J. Albers, G. L. Alexanderson. (editors) Mathematical People. Profiles and Interviews. Introduction by Philip J. Davis. Birkhäuser Verlag, Boston, 1985.

[3] M. Baum, D. Brandt, D. Lind, W. Riemer, P. Zimmermann. LS Stochastik. Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium. Ausgabe Baden-Württemberg. Klett Verlag, Stuttgart, 2003 (Druck 2005).

[4] R. Biehler, J. Engel, J. Meyer. (Hrsg.) Neue Medien und innermathematische Vernetzungen in der Stochastik. Anregungen zum Stochastikunterricht. Band 2. Arbeitsbericht des AK Stochastik 2002/2003. Tagungsband 2002/2003 des Arbeitskreises “Stochastik in der Schule” in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e.V. Verlag Franzbecker, Hildesheim, 2004.

[5] G. Bitsch, G. Reinelt, J. Stark. LS: Einführung in die Analysis und Stochastik mit dem GTR. Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium. Ausgabe Baden-Württemberg. Klett Verlag, Stuttgart, 2005.

[6] M. Borovcnik, J. Engel, D. Wickmann. (Hrsg.) Anregungen zum Stochastikunterricht: – Die NCTM-Standards 2000 – Klassische und Bayessche Sichtweise im Vergleich. Bericht von zwei Arbeitstagungen des Arbeitskreises “Stochastik in der Schule” in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e.V. (1999 und 2000 in Berlin). Verlag Franzbecker, Hildesheim, 2001.

[7] D. Brandt. Mathematik unterrichten mit TI-83 und TI-83 Plus in den Klassen 11 bis 13 – Baden-Württemberg – Teil III – Stochastik. Texas Instruments, Freising, 2003.

[8] G. Brüstle, H. Buck, et al. LS 11. Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium. Ausgabe Baden-Württemberg. Klett Verlag, Stuttgart, 1998 (Druck 2005).

[9] A. Büchter, H.-W. Henn. Elementare Stochastik. Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls. Mathematik für das Lehramt. Springer Verlag, Berlin, 2005.

[10] R. Diepgen, W. Kuypers, K. Rüdiger. Mathematik Sekundarstufe II: Stochastik. Cornelsen Verlag, Berlin, 1993 (Druck 2003).

[11] R. Diepgen. $P(H \mid D)$ versus $P(D \mid H_0)$? Wie man das Testen von Hypothesen – lieber doch nicht – einführen sollte. Stochastik in der Schule (2002), 34–38.

[12] M. Döhrmann. Zufall, Aktien und Mathematik. Vorschläge für einen aktuellen und realitätsbezogenen Stochastikunterricht. Dissertation. Texte zur mathematischen Forschung und Lehre. Band 35, Verlag Franzbecker, Hildesheim, 2004.

[13] H. Eggs. Stochastik I. Elementare Grundbegriffe. Studienbücher Mathematik. Diesterweg/Salle/Sauerländer, Frankfurt, 1984.

[14] P. Eichelsbacher. Geometrie und Münzwurf: das Modell zufälliger Graphen. Stochastik in der Schule **21** (2001), 2–8.

[15] A. Engel. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Band 1. Klett Verlag, Stuttgart, 1973 (Druck 1983).

[16] A. Engel. Stochastik. Klett Verlag, Stuttgart, 1987.

[17] L. Fahrmeir, R. Künstler, I. Pigeot, G. Tutz. Statistik. Der Weg zur Datenanalyse. 3. verbesserte Auflage, Springer Verlag, Berlin, 2001.

[18] G. Fischer. Stochastik einmal anders. Parallel geschrieben mit Beispielen und Fakten, vertieft durch Erläuterungen. Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2005.

[19] G. Gigerenzer et al. Das Reich des Zufalls. Wissen zwischen Wahrscheinlichkeiten, Häufigkeiten und Unschärfen. Spektrum, Akademischer Verlag, Heidelberg, 1999.

[20] H. Griesel, A. Gundlach, H. Postel, F. Suhr. (Hrsg.) Elemente der Mathematik. Band 11. Baden-Württemberg. Schroedel Verlag, Hannover, 2003.

[21] N. Haas, H. J. Morath. Anwendungsorientierte Aufgaben für die Sekundarstufe II. Mathematik. Bildungshaus Schulbuchverlage Westermann, Schroedel, Diesterweg, Braunschweig, 2005.

[22] N. Henze. Stochastik für Einsteiger. 2. Auflage. Vieweg Verlag, Braunschweig und Wiesbaden, 1999.

[23] H. Horak, U. Müller. Mathematik 11. Bayerischer Schulbuch Verlag, München, 1995.

[24] Th. Jahnke. Mathematik vor dem Abflug. Mathematik lehren **132** (2005), 47–51.

[25] Th. Jahnke, H. Wuttke. (Hrsg.) Mathematik: Stochastik, Orientierungswissen Analytische Geometrie. Cornelsen Verlag, Berlin, 2004.

[26] T. Leuders. (Hrsg.) Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II. Cornelsen Scriptor, Berlin, 2003.

[27] T. Leuders. Darf das denn wahr sein? Eine schüleraktive Entdeckung der Grundidee des Hypothesentestens durch Simulation mit Tabellenkalkulation. Praxis der Mathematik, Heft 4, August 2005, 47. Jahrgang, 8–16.

[28] W. Riemer. Stochastische Probleme aus elementarer Sicht. Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik; Band 18. BI-Verlag, Mannheim, 1991.

[29] H. K. Strick. Elemente der Mathematik. Leistungskurs Stochastik mit Orientierungswissen Lineare Algebra/Analytische Geometrie. Schroedel Verlag, Hannover, 2003.

[30] H. K. Strick. Bei Zufallsversuchen wiederholen sich die Ergebnisse eher als man vermutet. Praxis der Mathematik, Heft 4, August 2005, 47. Jahrgang, 23–29.

[31] U. P. Tietze, M. Klika, H. Wolpers. (Hrsg.) Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 3: Didaktik der Stochastik. Verfasst von H. Wolpers unter Mitarbeit von St. Götz. Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 2002.

[32] D. Wickmann. Bayes-Statistik. Einsicht gewinnen und entscheiden bei Unsicherheit. Mathematische Texte, Band 4, BI-Verlag, Mannheim, 1990.

Anhang

A Übersicht

B Concept Map zu Bernoulli-Ketten

C Klassenarbeit am 30.11.2005

D Nachholarbeit am 14.12.2005

E Auswertung

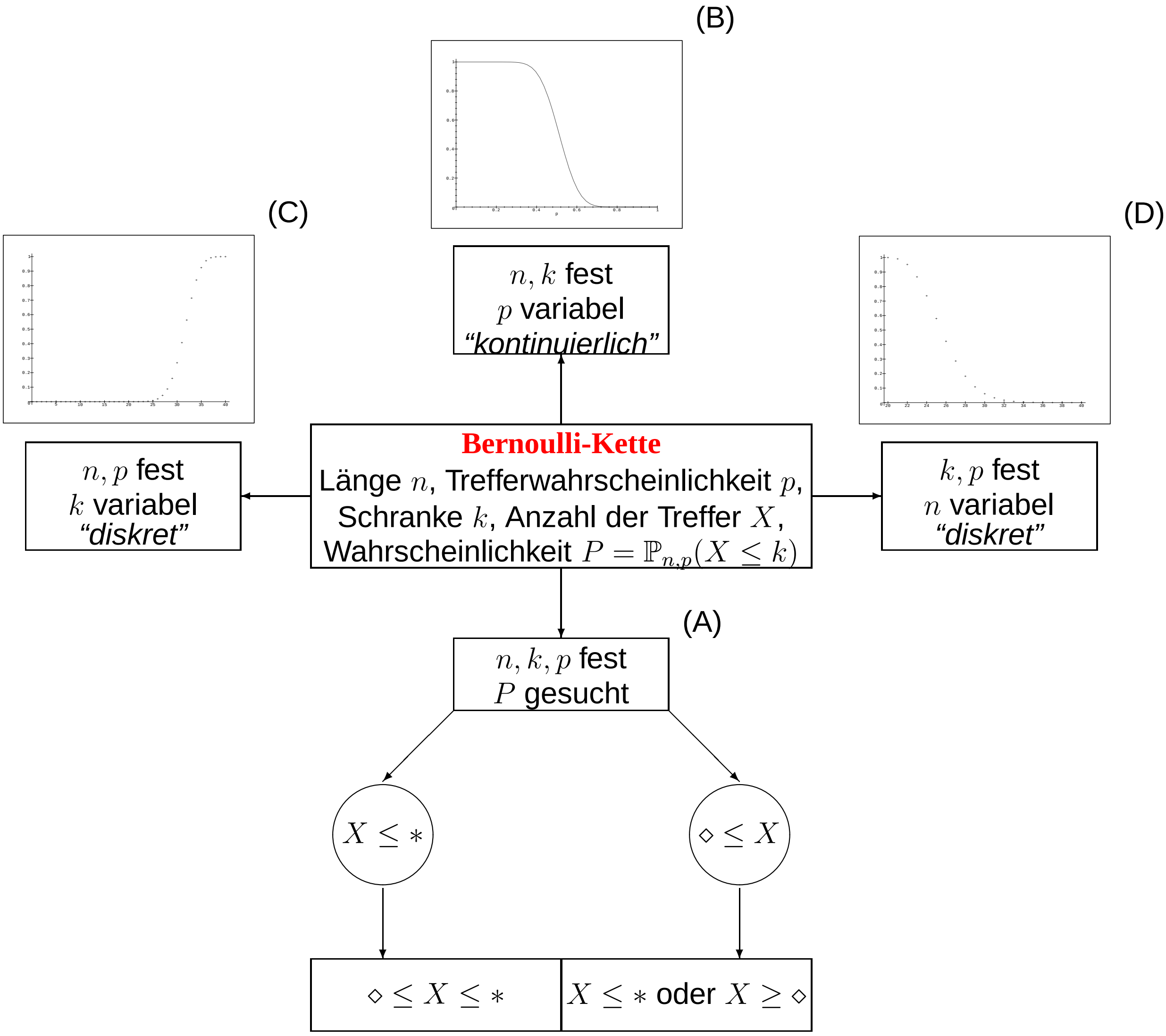
A Übersicht

Die nachfolgende Tabelle fasst die gesamte Unterrichtseinheit zusammen, um eine Einordnung der genauer dokumentierten Unterrichtsstunden zu erleichtern. Die betreffenden Stunden sind durch rote Nummern hervorgehoben.

Nr.	Tag	Datum	Thema	HA
1.	Mo	17.10.05	Einführung: Motivation, Übersicht, Befragung; Gruppenarbeit: Arbeitsblatt Dopingkontrolle	Arbeitsblatt fertigstellen
2.	Di	18.10.05	Besprechung der Gruppenarbeit; parallele Entwicklung einer Tabelle mit Konzepten und Begriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung: allgemein und am Beispiel	Tabelle teilweise mit Beispielen ausfüllen.
3.	Mi	19.10.05	Wiederholung und Klärung von Nachfragen; Beispiel zur Einführung von Bernoulli-Ketten	Beispiel vollständig bearbeiten
4.	Fr	21.10.05	Besprechung des Beispiels; Einführung der Begriffe: Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Kette; Berechnung von einfachen Wahrscheinlichkeiten im Beispiel; Wiederholung von Binomialkoeffizienten	Berechnung spezieller Binomialkoeffizienten
5.	Mo	24.10.05	Wiederholung von B-E und B-K; Einführung: Wahrscheinlichkeitsraum; Übungsaufgaben; Vertiefung: binomialverteilte ZV, Binomialverteilung; Information über Binomialkoeffizienten	Beispiel aus Buch erarbeiten
6.	Di	25.10.05	Vorstellung eines Beispiels durch Schüler; Zusatzfrage; Übungen zum GTR in Partner-/Gruppenarbeit mit AB Teil 1; Übungsaufgabe aus Buch	Erfinden einer eigenen originellen Aufgabe
7.	Mi	26.10.05	Besprechung der Übungsaufgabe; Übungen zum GTR in Partner-/Gruppenarbeit mit AB Teil 2; Ausgabe der vier Grundaufgaben A – D; Beginn mit Bearbeitung von Aufgabentyp A	Vollständige Bearbeitung von Aufgabentyp A
8.	Fr	28.10.05	Schüler trägt Aufgabentyp A vor; Vorstellen der von Schülern erfundenen Aufgaben; Bearbeitung der Aufgabentypen B – D anhand einer ausgegebenen Lösungsskizze	Langzeitaufgaben: Mind Map, eigene Aufgaben stellen und lösen
			Herbstferien	

Nr.	Tag	Datum	Thema	HA
9.	Mo	07.11.05	Nur ein Klassenteil ist anwesend; Übersicht mittels Mind Map; Wiederholung	
10.	Di	08.11.05	Besprechung wegen Comenius-Woche, parallel: Würfelexperiment; Auswertung: absolute und relative Häufigkeit; Wiederholung und Klärung zum “empirischen GGZ”; Herleitung EW; Beispiel: fairer Münzwurf	Variante des Beispiels zum Münzwurf mit $p = 0.2$
11.	Mi	09.11.05	Wiederholung; SV: Münzwurf; Vermutung über Berechnung von EW bei B-K entwickeln; PA: Berechnung des EW für $n = 1, 2, 3$ mit allg. p; Satz; Beispiel: Drehscheibe	Bearbeitung des Beispiels
12.	Fr	11.11.05	Sreferat zur Berechnung von Binomialkoeffizienten mittels Programmierung des GTR; EW allgemein wiederholen; Begründung der EW-Formel bei Binomialverteilungen mittels Additivität des EW; Beispiele und Übungen	
			Comenius-Woche	
13.	Mo	21.11.05	Wiederholung mittels Mind Map; einfache und vernetzende Beispielaufgaben zum EW; erfundene Geschichte: Verkehrsdelikt mit Indizienkette	
14.	Di	22.11.05	Einstieg in das Hypothesentesten; Beispiel: neue Therapie für Krankheit; Diskussion über mögliche Interpretation von extremen Testergebnissen; Aufstellen von Hypothesen und Wahl von Entscheidungsregeln; konkrete Berechnung bei gegebener Fehlerschranke (1. Art) mittels GTR; Zusammenfassung	Beispiele nach LS (neu) mit GTR-Anweisung vorbereiten
15.	Mi	23.11.05	Wiederholung Hypothesentesten; Beispiel AB mit GTR-Anweisung besprechen; LS (alt): Beispiele auf S. 47 konkretisieren und durchrechnen	
16.	Mi	23.11.05	Praktische Durchführung eines Hypothesentests mittels Geschmacksprobe (schweizer Gebirgswasser – Leitungswasser); Analyse aus zwei Perspektiven	Vorbereitung auf Klassenarbeit
17.	Mo	28.11.05	Wiederholung und Übungen Teil 1: B-K, EW, Übersicht Buch	
18.	Di	29.11.05	Wiederholung und Übungen Teil 2: Aufgabentyp D, Hypothesentest: Bürgerinitiative – zwei Perspektiven	
19.	Mi	30.11.05	Klassenarbeit	
20.	Mi	30.11.05	Klassenarbeit	
21.	Fr	02.12.05	Besprechung der Klassenarbeit	

B Concept Map zu Bernoulli-Ketten



(B) Dargestellt wird das Schaubild zu $p \mapsto \mathbb{P}_{40;p}(X \leq 20)$, $p \in [0, 1]$.

(C) Dargestellt wird das Schaubild zu $k \mapsto \mathbb{P}_{40;0.8}(X \leq k)$, $k \in \{0; 1; \ldots; 40\}$.

(D) Dargestellt wird das Schaubild zu $n \mapsto \mathbb{P}_{n;0.8}(X \leq 20)$, $n \in \{20; 21; \ldots; 40\}$.

Alle drei Schaubilder wurden mit Hilfe von Maple erzeugt.

C Klassenarbeit am 30.11.2005

1. Entscheide mit kurzer Begründung, ob die folgenden Zufallsexperimente als Bernoulli-Kette aufgefasst werden können. Im Fall einer Bernoulli-Kette ist anzugeben, was ein Treffer sein soll, ferner die Länge und die Trefferwahrscheinlichkeit.

   (a) Ein Multiple-Choice Test besteht aus 18 unabhängigen Fragen mit je 5 gleichplausiblen Antworten. Bei jeder Frage ist genau eine der möglichen Antworten richtig. Jemand kreuzt jeweils eine Antwort rein zufällig an.

   (b) Zehn verbeulte Münzen werden gleichzeitig geworfen. Es wird die Anzahl von "Zahl" notiert.

2. (a) Erkläre die folgenden Begriffe möglichst prägnant und gib jeweils **ein** Beispiel an:

   - Binomialkoeffizient;
   - Erwartungswert.

   (b) Hühnereier werden in Schachteln zu 10 Stück geliefert. Ein Ei ist mit 3 prozentiger Wahrscheinlichkeit beschädigt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält eine Schachtel

   - nur beschädigte Eier?
   - mehr als ein beschädigtes Ei?

3. Die billigen Ausflugsfahrten eines Busunternehmens sind so gefragt, dass stets alle 52 Plätze verkauft werden. Allerdings treten nur 80 Prozent der Kunden die Fahrt auch an. Der Unternehmer plant daher, tatsächlich mehr als 52 Fahrkarten zu verkaufen.

   (a) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 65 verkauften Karten die tatsächlich zur Verfügung stehenden 52 Plätze ausreichen.

   (b) Wie viele Karten dürfen höchstens verkauft werden, damit 52 Plätze mit 95 prozentiger Wahrscheinlichkeit ausreichen?

   Welche Annahme wird bei diesen Überlegungen implizit gemacht? Beziehe dazu **kurz** Stellung.

4. Man hat festgestellt, dass Placebos (Tabletten ohne Wirkstoffe) bei vielen Patienten die gleiche Wirkung erzielen wie gleich aussehende Tabletten mit Wirkstoffen. In einer Klinik weiß man, dass $p = 60$ Prozent derjenigen Patienten, die Beruhigungsmittel nehmen, auf Placebos ansprechen. Ein Arzt der Klinik vertritt die Meinung, dass dieser Anteil p erhöht werden kann, wenn man Placebos mit ausgesprochen bitterem Geschmack verwendet. Er gibt dazu 20 Patienten die neuen Placebos und stellt fest, dass 15 von ihnen ansprechen.

   (a) Untersuche die Nullhypothese $H_0 : p = 0.6$ und die Gegenhypothese $H_1 : p > 0.6$ bei der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.02$. Bestimme dazu zunächst den Ablehnungsbereich der Nullhypothese H_0. Kann man sich auf der Grundlage dieses Tests der Meinung des Arztes anschließen?

   (b) Wie groß ist bei dem in (a) bestimmten Ablehnungsbereich die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese H_0 fälschlicherweise nicht zu verwerfen, wenn tatsächlich $p = 0.8$ gilt?

D Nachholarbeit am 14.12.2005

1. Bei Geldspielautomaten mit einer Spieldauer von höchstens 30 Sekunden muss der Erwartungswert des Spielgewinns mindestens 60% des Einsatzes sein. Der Einsatz bei einem solchen Spiel sei 20 ct. Die folgende Tabelle enthält die möglichen Gewinnbeträge und die zugehörigen Gewinnwahrscheinlichkeiten, die sich aufgrund langfristiger Beobachtung des Spiels ergeben haben:

Gewinn in Euro:	0.2	0.5	1	2	0
Wahrscheinlichkeit:	0.1	0.05	0.03	0.01	0.81

   Prüfe durch eine Rechnung, ob das Spiel zulässig ist.

2. (a) Was versteht man unter einer Binomialverteilung?

   (b) Die Zufallsvariable X sei binomialverteilt mit $n = 7$ und $p = 0.3$. Gib die Werte $\mathbb{P}(X = 0), \ldots, \mathbb{P}(X = 7)$ in einer Tabelle an und zeichne ein Stabdiagramm. Berechne den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$.

   (c) In der Altersgruppe der 15- bis 24-jährigen haben rund 25% gesunde Zähne. Eine Zahnärztin untersucht 25 Personen dieser Altersgruppe. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben

   - mehr als 8
   - zwischen 5 und 15 (jeweils einschließlich)

   Personen in dieser Untersuchungsgruppe gesunde Zähne?

3. (a) Skizziere das Schaubild der Funktion $p \mapsto \mathbb{P}(X \leq 20)$, wenn X eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern $n = 30$ und $p \in [0, 1]$ ist. Beschreibe den Verlauf des Schaubilds in Worten.

   (b) Bei der Produktion eines Computerchips werden auf einer Siliziumscheibe 80 Chips hergestellt. Nicht alle diese Chips sind voll funktionsfähig, aber auftretende Defekte an einzelnen Chips sind in der Regel unabhängig voneinander. Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss ein einzelner Chip funktionsfähig sein, wenn man mit 95% Wahrscheinlichkeit wenigstens 60 funktionsfähige Chips auf einer Siliziumscheibe erhalten will?

4. Die Absicht der kleinen Partei A, in den Bundestag einzuziehen, droht an der sogenannten 5%-Hürde zu scheitern. Ein Meinungsforschungsinstitut befragt 500 Wahlberechtigte über ihre Wahlabsichten.

   (a) Wie viele der Befragten müssen mindestens die Absicht äußern, die Partei A zu wählen, damit die Nullhypothese $H_0 : p = 0.05$ zugunsten von $H_1 : p > 0.05$ mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 3% verworfen werden kann?

   (b) Angenommen, es wählen tatsächlich 10% der Wahlberechtigten die Partei A. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dann die Nullhypothese fälschlicherweise nicht verworfen?

E Auswertung

Der Fragebogen wird hier in Platz sparender Weise wiedergegeben. Der Originalbogen war zweiseitig und enthielt zu jeder Frage ausreichend Raum für Antworten.

1. Wie schätzt du die Bedeutung der Stochastik ein:
   - für die Praxis? • für das Leben nach der Schulzeit? • für die persönliche Bildung?
2. Welche Themen wurden behandelt? Nenne möglichst viele wesentliche Stichworte.
3. Wie interessant waren die einzelnen Themen? Kennzeichne unter 2. mit: $++, +, 0, -, --$.
4. Welche dieser Themen waren leicht verständlich, welche waren schwieriger (warum)?
5. Wie hätten die Schwierigkeiten vermieden oder abgeschwächt werden können?
6. Ist der Einsatz des GTR in der Stochastik (möglichst mit Beispiel oder Grund)
   (a) sinnvoll? (b) einfach? (c) hilfreich?
7. Hättest du gerne andere Themen in der Stochastik besprochen? Welche?
8. Hat das Thema Stochastik geholfen, das Verständnis von Methoden und Arbeitsweisen in der Mathematik zu fördern und zu erweitern? (Beispiele?)
9. Wie siehst du das Verhältnis von Stochastik und Analysis?
   (Gemeinsamkeiten, Unterschiede, Zusammenhänge)
10. Wie siehst du die Arbeitshaltung/das Engagement deines Mathematiklehrers?
11. Wie ist der Mathematiklehrer vorbereitet?
12. Kommentare zu Arbeitsmaterialien? Arbeitsformen?
13. Wie beurteilst du deine eigene Arbeitshaltung, die Arbeitsatmosphäre in der Klasse. Fallen dir gegebenenfalls Verbesserungsvorschläge ein?
14. War die Vorbereitung auf die KA ausreichend? Wie empfandest du den Schwierigkeitsgrad? War Kreativität gefordert? Worin bestanden die Schwierigkeiten, falls es welche gab?
15. Haben die Inhalte der KA zu den Inhalten des Unterrichts gepasst?
16. Wie viel Zeit hast du durchschnittlich auf die Nachbereitung des Unterrichts und die Hausaufgaben verwandt? Wie viel Zeit zur Vorbereitung auf die KA?
17. Andere Vorschläge, Kommentare, Wünsche (zur Stochastik/allgemein)?