Über die lokale Normalform J-konvexer Funktionen auf fast-komplexen Mannigfaltigkeiten

Claudio Llosa Isenrich

München 2011

Über die lokale Normalform J-konvexer Funktionen auf fast-komplexen Mannigfaltigkeiten

Claudio Llosa Isenrich

Bachelorarbeit
an der Fakultät für Mathematik
der Ludwig–Maximilians–Universität
München

vorgelegt von
Claudio Llosa Isenrich
aus Karlsruhe

München, den 08. August 2011

Gutachter: Prof. Dr. Kai Cieliebak

Inhaltsverzeichnis

1. English Preface

Let (V, J) be an almost complex manifold. That is, V is a smooth real manifold and $J \in \mathrm{End}(TV)$ a smooth section of the Endomorphism bundle of the tangent space, satisfying $J_x^2 = -\mathbb{1}$ for all $x \in V$. Define differential operators on smooth complex-valued functions on V, i.e. 0-forms, by:

$$\begin{gathered} d^J_{\mathbb{C}} : \Omega_0(V) \to \Omega_1(V) \\ \phi \mapsto d^J_{\mathbb{C}}\phi := d\phi \circ J, \\ \omega^J : \Omega_0(V) \to \Omega_2(V) \\ \phi \mapsto \omega^J_\phi := dd^J_{\mathbb{C}}\phi, \end{gathered}$$

and call $\phi \in \Omega_0(V)$ *J-convex in $p \in V$*, if $L^J_\phi(p;t) := \omega^J_\phi(t, J(p)t) > 0$ for all $0 \neq t \in T_pV$, respectively *J-convex* if ϕ is J-convex in every $p \in V$. The quadratic form L^J_ϕ is called *Levi Form* of ϕ with respect to J.

In this work I derive a local normal form for a J-convex function $\phi : V \to \mathbb{C}$ in a neighbourhood of a critical point, i.e. a point $p \in V$ with $d\phi(p) = 0$.

The first step is to derive a local normal form for a *i-convex* function, that is, when V is a complex manifold and i is the corresponding complex structure. Since we are only interested in the local behaviour, we can restrict ourselves to $\mathbb{C}^n$. In that case I proved the following Theorem, giving a normal form for the second order terms of ϕ:

Theorem 1. *Let $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ be i-convex, with $\phi(0) = 0$, $d\phi(0) = 0$. Then there are complex coordinates $(w_1, \cdots, w_n)$ around 0, such that ϕ has the form:*

$$\phi(w_1, \cdots, w_n) = |w|^2 + Re(w^t D w) + \mathcal{O}(|w|^3),$$

where $D = diag(d_1, \cdots, d_n)$ and $|\cdot|$ is the norm induced by the standard hermitian product on $\mathbb{C}^n$.

A proof is presented in Chapter 4. The main ingredient in the proof is a Lemma by Schur, which can be found in [3]. It can be applied in this context, since a function ϕ is i-convex if and only if $\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z_i \partial \overline{z_j}}\right)$ is positive definite. In the final revision of this work we became aware that a very similar statement appears in Harvey/Wells in [12]. However, the proof given here is different from theirs.

Furthermore, in Chapter 4.1, the following uniqueness statement is proved:

Corollary 1. *Let $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ be i-convex with critical point in 0. Then there is precisely one diagonal matrix $D = diag(d_1, \cdots, d_n)$, $0 \leq d_1 \leq \cdots \leq d_n$, for which $\phi(z_1, \cdots, z_n) = |z|^2 + Re(z^t Dz) + \mathcal{O}(|z|^3)$ in suitable complex coordinates.*
Furthermore, if $0 < d_1 < d_2 < \cdots < d_n$, then the normal form is preserved precisely by complex transformations of the form $f(z_1, \cdots, z_n) = (\pm z_1, \cdots, \pm z_n) + \mathcal{O}(|z|^2)$. A similar statement holds if the inequalities are not strict.

The terms of order larger than 2 cannot be controlled in such a nice way. The question of how far it is possible to control those terms is discussed in Chapter 4.2.

When one tries to generalize those statements to J-convex functions two main problems arise:

(1) For i-convex functions there is an obvious class of suitable coordinate transformations. In contrast, the question for the right transformations cannot be answered in a canonical way for J-convex functions. More precisely the class of (J, J)-holomorphic coordinate transformations, i.e., coordinate transformations that preserve J, is much smaller than the one of complex coordinate tranformations (cf. [5]).
(2) The Hessian $\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\right)$ is not necessarily positive definite if ϕ is a J-convex function.

Those difficulties can be circumvented, by choosing coordinates in which J attains a normal form with the property that ϕ is J-convex in 0 if and only if ϕ is i-convex in 0. The normal form for J was derived by Diederich and Sukhov [8] and a precise description can be found in Chapter 6. I prove in Chapter 7 that in fact that normal form for J is invariant under the transformations used to prove Theorem 1 and therefore there are obvious generalizations for the Theorem, as well as for the Corollaries. Finally, I prove the following result:

Theorem 2. *Let (V, J) be an almost complex manifold and $\phi : V \to \mathbb{C}$ a J-convex function with a non-degenerated critical point in $p \in V$. Then there are coordinates $z = (z_1, \cdots, z_n)$, defined in a neighbourhood of p, with $z(p) = 0$, such that J is in normal form and ϕ attains the form*

$$\phi(z) = \phi(p) + |z|^2 + Re(z^t Dz) + r(z).$$

Here $D = diag(d_1, \cdots, d_n)$, $0 \leq d_1 \leq \cdots \leq d_n$, and r is a polynomial in the z_i with monomials of degree 3 and 4 only.

2. Einleitung

Bei der Untersuchung mathematischer Objekte ist die Frage von besonderem Interesse, ob es möglich ist diese auf eine Normalform zu bringen, das heißt, ob es möglich ist, unter Beachtung gewisser charakterisierender Eigenschaften, das Objekt so zu verändern, dass es am Ende auf möglichst wenige Parameter reduziert werden kann. Daher sind viele Aussagen dieser Art bekannt, wie zum Beispiel die Jordannormalform für Matrizen. Diese Arbeit beschäftigt sich damit eine Normalform für einen bestimmten Funktionentyp auf fast-komplexen Mannigfaltigkeiten zu finden, den der J-konvexen Funktionen.
Eine wichtige Aussage in der Theorie reellwertiger Funktionen auf reellen Mannigfaltigkeiten ist das Morse-Lemma(siehe [7]). Es besagt, dass für eine reelle Mannigfaltigkeit M und eine reellwertige Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ um jeden nichtdegenerierten kritischen Punkt $p \in M$ von f Koordinaten $(x_1, \cdots, x_n)$ existieren, in denen f die Form

$$f(x_1, \cdots, x_n) = f(p) + x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_n^2,$$

für ein $k \in \{0, \cdots, n\}$ annimmt. Diese Aussage lässt sich auf ähnliche Art und Weise auf holomorphe Funktionen auf komplexen Mannigfaltigkeiten übertragen. Genauer findet man folgende Aussage:
Gegeben eine komplexe Mannigfaltigkeit V und eine holomorphe Funktion $f : V \to \mathbb{C}$, die in $p \in V$ einen nichtdegenerierten kritischen Punkt hat. Dann existieren lokale holomorphe Koordinaten, in denen f die Form

$$f(z_1, \cdots, z_n) = f(p) + z_1^2 + \cdots + z_n^2,$$

annimmt (siehe zum Beispiel [11]).
Diese Arbeit beschäftigt sich mit J-konvexen Funktionen auf fast-komplexen Mannigfaltigkeiten (V, J). Das sind Funktionen $\phi : V \to \mathbb{R}$, so dass für die 2-Form $-dd_{\mathbb{C}}\phi$ gilt: $-dd_{\mathbb{C}}\phi(X, JX) > 0 \; \forall \, X \in TV$, wobei $d_{\mathbb{C}}\phi(X) := d\phi(JX)$. Ist nun V, aufgefasst als reelle Mannigfaltigkeit, $2n$-dimensional und $p \in V$ ein kritischer Punkt von ϕ, so erhält man also aus der J-Konvexität eine Bedingung von der Art, dass ϕ in maximal n Richtungen degeneriert ist. Vergleicht man dies mit der Nichtdegeneriertheits-Bedingung im Morse-Lemma, die essentiell in dessen Beweis ist, so stellt sich die Frage, ob es eine vergleichbare lokale Normalform für J-konvexe Funktionen gibt.
Man stellt fest, dass eine derart starke lokale Normalform nicht existiert. Dennoch lassen sich die Terme zweiter Ordnung einer J-konvexen Funktion auf eine vergleichbare lokale Normalform bringen, nämlich auf die Form

$$\phi(z_1, \cdots, z_n) = |z|^2 + Re(z^t D z) + \mathcal{O}(|z|^3), \tag{2.1}$$

mit $D = diag(d_1, \cdots, d_n)$ diagonal mit Einträgen $0 \leq d_1 \leq \cdots d_n$, was in den Kapiteln 3 und 7 gezeigt wird. Besondere Beachtung ist hierbei der Tatsache zu schenken durch welche Koordinatentransformationen man ϕ auf diese lokale Normalform bringt, da diese in einer gewissen Weise die fast-komplexe Struktur auf V respektieren sollten. Im Fall der standard-komplexen Struktur i, das heißt V ist eine komplexe Mannigfaltigkeit, sind es die holomorphen Koordinatentransformationen, die i erhalten und es ist deshalb sinnvoll holomorphe Koordinatentransformationen zu betrachten. Dies ist für allgemeine fast-komplexe Strukturen nicht der Fall und man wird feststellen, dass es im Allgemeinen nicht möglich sein wird nur Koordinatentransformationen zu betrachten, die die fast-komplexe Struktur erhalten. Viel mehr wird es von Nöten sein die Aussagen weiter abzuschwächen und nur zu verlangen, dass die Koordinatentransformationen gewisse Eigenschaften von J erhalten. Während der letzten Korrekturen an der Arbeit stellten wir fest, dass die Normalform aus Gleichung (2.1) für i-konvexe Funktionen bereits bekannt ist. Sie findet sich in dem Paper „Zero sets of non-negative strictly plurisubharmonic functions“ von F.R. Harvey und R.O. Wells (siehe [12]).

Die Arbeit baut sich folgendermaßen auf:
Kapitel 3 wiederholt allgemeine Aussagen, die später benötigt werden. Es unterteilt sich in mehrere Unterkapitel, wobei sich die ersten drei mit Grundlagen der Theorie fast-komplexer und komplexer Mannigfaltigkeiten beschäftigen, das vierte Grundlagen über J-konvexe Funktionen wiederholt und das fünfte Aussagen aus der linearen Algebra. Besondere Beachtung ist der nicht sehr bekannten Aussage von Schur (siehe [3]) über die Diagonalisierbarkeit symmetrischer komplexer Matrizen in Kapitel 3.5 zu schenken.
In Kapitel 4 wird gezeigt, dass sich i-konvexe Funktionen immer durch komplex-lineare Koordinatentransformationen auf die Form aus Gleichung (2.1) bringen lassen und es werden Aussagen über die Eindeutigkeit dieser Form getroffen, sowie diskutiert, ob es eine sinnvolle lokale Normalform für die Terme höherer Ordnung gibt.
Die Kapitel 5 und 6 liefern die notwendige Theorie für die Verallgemeinerung der lokalen Normalform i-konvexer Funktionen auf eine lokale Normalform J-konvexer Funktionen. Kapitel 5 wiederholt Aussagen aus der Theorie J-holomorpher Kurven, die eine wichtige Rolle bei der Diskussion J-konvexer Funktionen spielen. Diese wird in Kapitel 6 verwendet, um eine lokale Normalform für die fast-komplexe Struktur J zu finden, die die Eigenschaft hat, dass bezüglich dieser lokalen Normalform J-Konvexität und i-Konvexität in einem Punkt dasselbe sind. Kapitel 7 verwendet dieses Resultat um aus der lokalen Normalform i-konvexer Funktionen eine lokale Normalform für die J-konvexen Funktionen herzuleiten.

3. Voraussetzungen und Notationen

In diesem Kapitel soll an einige Voraussetzungen erinnert werden, die dann im Folgenden verwendet werden, und Notationen eingeführt werden. Um die Unterscheidung zwischen i-konvexen und J-konvexen Funktionen zu verstehen, ist es wichtig, den Unterschied zwischen komplexen und fastkomplexen Mannigfaltigkeiten zu kennen. Die Einführung dieser Begriffe in den Kapiteln 2.1 bis 2.3 orientiert sich an [1], sofern nicht explizit auf andere Quellen verwiesen wird. Weiter benötigt man einige grundlegende Eigenschaften J-konvexer Funktionen. Diese finden sich in Kapitel 2.4, welches sich an der Einführung J-konvexer Funktionen in [14] orientiert. Kapitel 2.5 fasst einige Ergebnisse über die Diagonalisierbarkeit von Matrizen zusammen.

3.1. Komplexe Strukturen auf reellen Vektorräumen.

Zunächst benötigt man den Begriff einer komplexen Struktur J auf einem reellen Vektorraum V.

Definition 1. Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension $dim V = n$. Eine *komplexe Struktur J auf V* ist ein linearer Endomorphismus $J : V \to V$, so dass $J^2 = -\mathbb{1}$.

Bemerkung 1. J induziert auf V die Struktur eines komplexen Vektorraumes via
$$(a + ib) \cdot X := aX + bJX$$
für alle $X \in V$, $a, b \in \mathbb{R}$, wie man leicht nachrechnet. Insbesondere hat also jeder Vektorraum, auf dem eine komplexe Struktur definiert ist, gerade reelle Dimension. Man bezeichnet den durch J induzierten komplexen Vektorraum im folgenden mit (V, J).

Bemerkung 2. Hat man umgekehrt einen komplexen Vektorraum der Dimension n gegeben, so induziert die Identifikation von $\mathbb{C}^n$ mit $\mathbb{R}^{2n}$, gegeben durch
$$(z_1 = x_1 + iy_1, \cdots, z_n = x_n + iy_n) \to (x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n),$$
eine komplexe Struktur auf $\mathbb{R}^{2n}$ durch $JX := iX$ für alle $X \in \mathbb{C}^n$. Diese ist in der Standardbasis offensichtlich gegeben durch die Matrix:
$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_n \\ \mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Sie wird im folgenden auch als *standard-komplexe Struktur* auf $\mathbb{R}^{2n}$ bezeichnet.

Proposition 1. *Seien J und $\tilde{J}$ komplexe Strukture auf den reellen Vektorräumen V und $\tilde{V}$ und sei $f : V \to \tilde{V}$ eine reell-lineare Abbildung. Dann gilt:*
f ist als Abbildung zwischen den durch J und $\tilde{J}$ definierten komplexen Vektorräumen komplex-linear genau dann, wenn $\tilde{J} \circ f = f \circ J$.

Beweis. Dies folgt sofort aus der Definition der komplexen Multiplikation auf (V, J) und $(V, \tilde{J})$. $\square$

Die folgende Proposition charakterisiert die komplexen Strukturen auf $\mathbb{R}^{2n}$ durch die standard-komplexe Struktur. Ein Beweis findet sich in [1].

Proposition 2. *Jede komplexe Struktur J auf $\mathbb{R}^{2n}$ lässt sich darstellen als*

$$J = SJ_0S^{-1}$$

für ein passendes $S \in GL(2n; \mathbb{R})$.

Im Kontext J-holomorpher Kurven ist die folgende Proposition von Interesse

Proposition 3. *Sei J eine komplexe Struktur auf einem reellen Vektorraum V und $V' \subset V$ ein reeller Untervektorraum. Dieser ist J-invariant genau dann, wenn V' ein komplexer Untervektorraum von V, aufgefasst als komplexer Vektorraum, ist.*

Beweis. Folgt sofort aus der durch J definierten komplexen Multiplikation auf V. $\square$

Korollar 1. *Jeder eindimensionale komplexe Untervektorraum U von V, ausgestattet mit der komplexen Struktur J, lässt sich darstellen als $U = span(X, JX)$ für ein $X \in U$.*

Beweis. Sei $0 \neq X \in U$ beliebig. Da U ein eindimensionaler komplexer Untervektorraum von V, ausgestattet mit der komplexen Struktur J, ist, kann man jedes $Y \in U$ schreiben als $Y = (a + bJ)X$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Das heißt $U = span(X, JX)$. $\square$

3.2. **Komplexe und fast-komplexe Mannigfaltigkeiten.** Mit Hilfe des Begriffes einer komplexen Struktur auf einem reellen Vektorraum lässt sich jetzt definieren, was man unter einer fast-komplexen Mannigfaltigkeit versteht:

Definition 2. Sei V eine differenzierbare reelle Mannigfaltigkeit.
Eine *fast-komplexe Struktur $J \in End(TV)$ auf V* ist ein glatter Schnitt im Endomorphismenbündel des Tangentialbündels, so dass $J_x : T_xV \to T_xV$ in jedem $x \in V$ eine komplexe Struktur auf T_xV definiert.
Eine *fast-komplexe Mannigfaltigkeit* (V, J) ist eine differenzierbare reelle Mannigfaltigkeit V zusammen mit einer fast-komplexen Struktur J.
Hierbei bezeichnet TV das Tangentialbündel von V und T_xV den Tangentialraum an V in x.

Da jeder Vektorraum auf dem eine komplexe Struktur definiert ist gerade Dimension hat, gilt dies insbesondere für T_xV. Es folgt sofort, dass jede fast-komplexe Mannigfaltigkeit (V, J) gerade reelle Dimension hat, d.h. $dim_{\mathbb{R}}V = 2n$.

Beispiel 1. $\mathbb{C}^n$ ist eine differenzierbare relle Mannigfaltigkeiten, diffeomorph zu $\mathbb{R}^{2n}$ vermittels des Diffeomorphismus

$$(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n) \mapsto z = (z_1 = x_1 + iy_1, \cdots, z_n = x_n + iy_n)$$

Der reelle Tangentialraum $T_z\mathbb{C}^n$ hat bezüglich dieser Koordinaten die Basis:

$$T_z\mathbb{C}^n = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial y_n})$$

Offensichtlich ist dann durch $J_0(z) := J_0 : T_z\mathbb{C}^n \to T_z\mathbb{C}^n$ eine fast-komplexe Struktur auf $\mathbb{C}^n$ definiert und es gilt:

$$J_0(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad J_0(\frac{\partial}{\partial y_i}) = -\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

J_0 stimmt, unter der in Bemerkung 2 gegebenen Identifikation von $\mathbb{R}^{2n} = T_z\mathbb{C}^n$ mit $\mathbb{C}^n$, mit der Multiplikation mit i auf $\mathbb{C}^n$ überein. Deshalb bezeichnet man die so erhaltene fast-komplexe Mannigfaltigkeit auch mit $(\mathbb{C}^n, i)$ und schreibt manchmal i anstelle von J_0. Man nennt i die *standard-fast-komplexe* beziehungsweise *natürliche fast-komplexe* Struktur auf $\mathbb{C}^n$.

Eine komplexe Mannigfaltigkeit V wird wie folgt definiert:

Definition 3. Eine *komplexe Mannigfaltigkeit* ist eine reelle Mannigfaltigkeit V, zusammen mit einem Atlas $\{f_\alpha, U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$, so dass die Übergangsfunktionen

$$f_\alpha \circ (f_\beta)^{-1} : f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^n \to f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^n$$

holomorph für alle $\alpha, \beta \in A$ sind.

Wie man zum Beispiel in [1] nachlesen kann gilt:

Lemma 1. *Jede komplexe Mannigfaltigkeit V ist auf natürliche Weise eine fast-komplexe Mannigfaltigkeit, wobei die fast-komplexe Struktur J auf V von der natürlichen fast-komplexen Struktur auf den Karten induziert wird. Das heißt, dass J eindeutig festgelegt ist durch $(f_\alpha)_* \circ J = i \circ (f_\alpha)_*$. Die Wohldefiniertheit von J folgt aus der Tatsache, dass die Übergangsfunktionen holomorph sind.*

In diesem Kontext macht es Sinn den Begriff der $(J,\tilde{J})$-holomorphen Funktionen einzuführen.

Definition 4. Eine glatte Funktion $f : (V, J) \to (\tilde{V}, \tilde{J})$ wird $(J,\tilde{J})$-holomorph genannt, wenn gilt $f_* \circ J = \tilde{J} \circ f_*$.

Bemerkung 3. Hat man einen Diffeomorphismus $f : V \to \tilde{V}$ zwischen reellen Mannigfaltigkeiten und eine fast-komplexe Struktur J auf V, so induziert f auf natürliche Weise eine fast-komplexe Struktur auf $\tilde{V}$ durch $\tilde{J} := f_* \circ J \circ (f^{-1})_*$. Insbesondere ist dann f $(J,\tilde{J})$-holomorph.

Die hier gegebene Definition holomorpher Funktionen ist konsistent mit der klassischen Definition holomorpher Funktionen (Beweis siehe [1]):

Lemma 2. *Eine Abbildung $f : (\mathbb{C}^m, i) \to (\mathbb{C}^n, i)$ ist (i, i)-holomorph genau dann, wenn sie holomorph im klassischen Sinne ist.*

Das heißt die Diffeomorphismen von $\mathbb{C}^n$ nach $\mathbb{C}^n$, die die natürliche fast-komplexe Struktur erhalten, sind genau die biholomorphen Abbildungen $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Betrachtet man jetzt fast-komplexe Strukturen J und $\tilde{J}$ auf einer Mannigfaltigkeit V, so stellt sich die Frage, ob es immer einen $(J,\tilde{J})$-holomorphen Diffeomorphismus $\phi : V \to V$ gibt. Wie man leicht, mit Hilfe des folgenden Theorems von Newlander-Nirenberg ([4]), durch Wahl einer geeigneten fast-komplexen Struktur zeigen kann, ist dies im Allgemeinen nicht der Fall.

Theorem 3. *Eine fast-komplexe Mannigfaltigkeit (V, J) ist komplex genau dann, wenn der Nijenhuistensor N_J identisch verschwindet.*

Hierbei ist der Nijenhuistensor N_J *einer fast-komplexen Struktur J auf einer Mannigfaltigkeit V der $(2,1)$-Tensor definiert durch*

$$N_J(X, Y) := [JX, JY] - [X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y]$$

für alle $X, Y \in TV$.

Ein Beispiel für die Existenz fast-komplexer Strukturen, die nicht komplex sind, ist das Folgende, welches mit Hilfe der Ergebnisse von M. Grüneberg (siehe [13]) konstruiert wurde:

Beispiel 2. In [13] wird gezeigt, dass, gegeben eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit (M, g), auf natürliche Weise eine zur Metrik g assoziierte fast-komplexe Struktur J_g auf dem Tangentialbündel TM existiert. Insbesondere wird gezeigt, dass J_g von komplexen Koordinaten induziert wird genau dann, wenn g eine flache Metrik auf M ist. Unter Verwendung dieser Ergebnisse genügt es zur Konstruktion einer fast-komplexen Struktur, die nicht komplex ist, eine beliebige Metrik auf $\mathbb{R}^2$ zu betrachten, die nicht flach ist, und die assoziierte fast-komplexe Struktur zu berechnen. Dies wurde für die Metrik $g(x_1, x_2) := (1 + x_2^2)dx_1^2 + dx_2^2$ gemacht und man erhält folgende fast-komplexe Struktur J:

$$J(x_1, x_2, x_3, x_4) := \begin{pmatrix} \frac{x_2 x_4}{1+x_2^2} & \frac{x_2 x_3}{1+x_2^2} & 1 & 0 \\ -x_2 x_3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 + \frac{x_2^2 x_3^2}{1+x_2^2} - \frac{x_2^2 x_4^2}{(1+x_2^2)^2} & -\frac{x_2^2 x_3 x_4}{(1+x_2)^2} & -\frac{x_2 x_4}{1+x_2^2} & -\frac{x_2 x_3}{1+x_2^2} \\ \frac{x_2^2 x_3 x_4}{(1+x_2^2)} & -1 + \frac{x_2^2 x_3^2}{1+x_2^2} & x_2 x_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Nachrechnen zeigt, dass J tatsächlich eine fast-komplexe Struktur auf $\mathbb{R}^4$ ist. Das heißt $(\mathbb{R}^4, J)$ ist eine fast-komplexe Mannigfaltigkeit.
Um zu sehen, dass diese nicht komplex ist betrachtet man die Vektorfelder $\frac{\partial}{\partial x_3}$ und $\frac{\partial}{\partial x_4}$ und zeigt, dass der Nijenhuistensor $N_J(\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4})$ nicht identisch verschwindet. Hierzu berechnet man zunächst die letzten drei Terme des

Nijenhuis-Tensor:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4}\right] &= 0, \\
J\left[J\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4}\right] &= J\left[\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2x_4}{1+x_2^2}\frac{\partial}{\partial x_3} + x_2x_3\frac{\partial}{\partial x_4}, \frac{\partial}{\partial x_4}\right] \\
&= J\left(\frac{x_2}{1+x_2^2}\frac{\partial}{\partial x_3}\right), \\
J\left[\frac{\partial}{\partial x_3}, J\frac{\partial}{\partial x_4}\right] &= J\left[\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{x_2x_3}{1+x_2^2}\frac{\partial}{\partial x_3}\right] \\
&= J\left(-\frac{x_2}{1+x_2^2}\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \\
&= -J\left[J\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4}\right].
\end{aligned}$$

Das heißt, dass die Summe der letzten drei Terme im Nijenhuis-Tensor verschwindet. Also gilt:

$$\begin{aligned}
N_J(\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4}) &= \left[J\frac{\partial}{\partial x_3}, J\frac{\partial}{\partial x_4}\right] \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2x_4}{1+x_2^2}\frac{\partial}{\partial x_3} + x_2x_3\frac{\partial}{\partial x_4}, \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{x_2x_3}{1+x_2^2}\frac{\partial}{\partial x_3}\right] \\
&= \frac{x_2^2x_4}{(1+x_2^2)^2}\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{x_4}{1+x_2^2}\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{x_2^2x_3}{1+x_2^2}\frac{\partial}{\partial x_4} \\
&= \frac{1+2x_2^2}{(1+x_2^2)^2}\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{1}{1+x_2^2}\frac{\partial}{\partial x_4}
\end{aligned}$$

Das heißt der Nijenhuis-Tensor, ausgewertet auf $\frac{\partial}{\partial x_3}$ und $\frac{\partial}{\partial x_4}$, wird nirgends Null und ist somit insbesondere nicht identisch verschwindend. Also ist die fast-komplexe Mannigfaltigkeit $(\mathbb{R}^4, J)$ nach Theorem 3 keine komplexe Mannigfaltigkeit.

Von besonderem Interesse im Kontext der Unterscheidung zwischen komplexen und fast-komplexen Mannigfaltigkeiten ist die Frage, ob der Raum der (J, J)-holomorphen Diffeomorphismen von $(\mathbb{C}^n, J)$ nach $(\mathbb{C}^n, J)$ sich mit dem Raum der biholomorphen Abbildungen auf $(\mathbb{C}^n, i)$ identifizieren lässt beziehungsweise ob Ähnlichkeiten zwischen den beiden Räumen bestehen. Dies ist nicht der Fall sondern viel mehr ist dieser Raum im Allgemeinen viel kleiner, wie aus [5] folgt.

3.3. **Komplexifizierung des Tangentialbündels.** Es erweist sich als nützlich lokal auf $\mathbb{C}^n$, aufgefasst als $2n$-dimensionale reelle Mannigfaltigkeit, an Stelle von $\mathbb{R}^{2n}$ zu arbeiten, da beide Mannigfaltigkeiten, vermittels des in Beispiel 1 gegebenen Diffeomorphismus

$$(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n) \mapsto z = (z_1 = x_1 + iy_1, z_n = \cdots x_n + iy_n),$$

diffeomorph zueinander sind und sich auf $\mathbb{C}^n$ die Theorie J-holomorpher Kurven in Kapitel 5 als intuitiver herausstellt. Von besonderem Interesse ist hierbei die Komplexifizierung des Tangentialbündels.

Definition 5. Sei V eine $2n$-dimensionale reelle Mannigfaltigkeit. Der durch das reelle Tensorprodukt von $\mathbb{C}$ mit TV gegebene Vektorraum

$$T^{\mathbb{C}}V := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} TV$$

wird als *Komplexifizierung des Tangentialbündels* von V bezeichnet.
Analog wird für $p \in V$ der durch das reelle Tensorprodukt von $\mathbb{C}$ mit T_pV gegebene Vektorraum

$$T_p^{\mathbb{C}}V := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_pV$$

als *Komplexifizierung des Tangentialraumes* von V in p bezeichnet.

Offensichtlich ist $T_p^{\mathbb{C}}V$ auf natürliche Weise ein komplexer Vektorraum durch Multiplikation mit i. Stattet man zusätzlich V mit einer fast-komplexen Struktur $J \in End(TV)$ aus, so erhält man durch $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung von J auf $T^{\mathbb{C}}V$ eine fast-komplexe Struktur auf der Komplexifizierung des Tangentialbündels. Diese stimmt im allgemeinen nicht mit der Multiplikation mit i überein.
Man sieht leicht ein, dass J die komplexen Eigenwerte $\pm i$ hat, denn:
Sei $X \in TV$ Eigenvektorfeld von J zum Eigenwert λ. Dann folgt aus $J^2 = -\mathbb{1}$, dass gilt:

$$\lambda^2 X = J^2 X = -X \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

Definition 6. Der Raum der Eigenvektorfelder zum Eigenwert i wird mit

$$T^{(1,0)}V := \left\{ X \in T^{\mathbb{C}}V | JX = iX \right\}$$

bezeichnet. Man nennt seine Elemente auch *holomorphe Vektorfelder*.
Analog wird der Raum der Eigenvektorfelder zum Eigenwert $-i$ mit

$$T^{(0,1)}V := \left\{ X \in T^{\mathbb{C}}V | JX = -iX \right\}$$

bezeichnet und man nennt seine Elemente auch *antiholomorphe Vektorfelder*.

Dass diese Bezeichnungen Sinn ergeben wird später klar, wenn man $\mathbb{C}^n$ mit der standard-komplexen Struktur betrachtet.

Bemerkung 4. Man liest unmittelbar ab, dass auf $T^{(1,0)}V$ die durch i gegebene fast-komplexe Struktur mit der durch J gegebenen übereinstimmt.

Man erhält folgende Aussage über den Zusammenhang zwischen TV, $T^{\mathbb{C}}V$, $T^{(1,0)}V$ und $T^{(0,1)}V$:

Lemma 3. *Sei (V, J) eine fast-komplexe Mannigfaltigkeit. Setze J $\mathbb{C}$-linear auf $T^{\mathbb{C}}V$ fort. Dann gilt:*

(1) *Durch*

$$\begin{array}{ccc} TV & \to & T^{(1,0)}V \\ X & \mapsto & \frac{1}{2}(X - iJX) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} TV & \to & T^{(0,1)}V \\ X & \mapsto & \frac{1}{2}(X + iJX) \end{array}$$

ist ein $\mathbb{C}$-linearer (bzw. $\mathbb{C}$-antilinearer) Isomorphismus gegeben.

(2)

$$T^{\mathbb{C}}V = T^{(1,0)}V \oplus T^{(0,1)}V$$

Beweis. Man rechnet nach, dass $\frac{1}{2}(X-iJX)$ Eigenvektorfeld zum Eigenwert i ist:

$$J\frac{1}{2}(X-iJX)=\frac{1}{2}(JX-iJ^2X)=\frac{1}{2}(iX+JX)=i\frac{1}{2}(X-iJX).$$

Analog gilt:

$$J\frac{1}{2}(X+iJX)=\frac{1}{2}(JX-iX)=-i\frac{1}{2}(X+iJX).$$

Also sind die Abbildungen wohldefiniert. Es sei durch $Y\to\bar{Y}$ die komplexe Konjugation bezüglich i auf $T^{\mathbb{C}}V$ gegeben. Offensichtlich ist für beide Abbildungen die Umkehrabbildung auf dem Bild gegeben durch:

$$Y\mapsto Y+\bar{Y}$$

Das heißt aber, dass die beiden Abbildungen $\mathbb{R}$-lineare Isomorphismen auf ihr Bild sind, und somit ihr Bild jeweils reelle Dimension $2n$ hat.
Wegen $dim_{\mathbb{R}}T_p^{\mathbb{C}}V=4n$ und $T_p^{(1,0)}V\cap T_p^{(0,1)}V=\{0\}$ für alle $p\in V$, folgt die Isomorphismuseigenschaft in (1) und hieraus sofort (2).
Es bleibt die komplexe Linearität (bzw. Antilinearität) zu überprüfen. Seien also $a,b\in\mathbb{R}$ beliebig. Unter Vernachlässigung des Faktors $\frac{1}{2}$, der rein technischer Natur ist, gilt:

$$JX-iJ(JX)=JX+iX=i(X-iJX)$$
$$JX+iJ(JX)=JX-iX=-i(X+iJX)$$

Das heißt die erste Abbildung ist komplex linear und die zweite komplex antilinear. □

Man rechnet leicht nach, dass J eine fast-komplexe Struktur auf dem reellen Kotangentialbündel induziert, die gegeben ist durch:

$$(J\lambda)(X):=\lambda(JX)\ \ \forall X\in TV;\lambda\in T^*V.$$

Komplexifizierung des Kotangentialbündels ergibt:

$$T^{(1,0)*}V=(T^{(1,0)}V)^*=\{\lambda\in T^{\mathbb{C}}V\mid\lambda(Y)=0\ \forall\ Y\in T^{(0,1)}V\},$$
$$T^{(0,1)*}V=(T^{(0,1)}V)^*=\{\lambda\in T^{\mathbb{C}}V\mid\lambda(Y)=0\ \forall\ Y\in T^{(1,0)}V\},$$

was man leicht nachrechnen kann. Ähnlich können auch das Tensorbündel und die äußere Algebra komplexifiziert und zerlegt werden, worauf aber nicht weiter eingegangen werden soll, da es in den Folgenden Betrachtungen keine Rolle spielt.

Sei jetzt $V=\mathbb{C}^n$ zusammen mit der standard-komplexen Struktur J_0. Es sei daran erinnert, dass

$$(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n},\frac{\partial}{\partial y_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y_n})$$

eine Basis des reellen Tangentialraumes $T_z\mathbb{C}^n\cong T_z\mathbb{R}^{2n}$ ist. Wie oben bereits beschrieben, ist $T_z^{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n$ auf natürliche Weise ein komplexer Vektorraum durch Multiplikation mit i. Offensichtlich bilden die Vektoren der Form

$$\frac{\partial}{\partial z_i}:=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_i}-i\frac{\partial}{\partial y_i}),i=1,\cdots,n,$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_i} + i\frac{\partial}{\partial y_i}), i = 1, \cdots, n$$

eine Basis von $T_z^{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n$ und durch sie ist eine globale Trivialisierung des Tangentialbündels gegeben. Man rechnet leicht nach, dass gilt:

$$T^{\mathbb{C}(1,0)}\mathbb{C}^n := span\{\frac{\partial}{\partial z_i}|i = 1, \cdots, n\},$$

$$T^{\mathbb{C}(0,1)}\mathbb{C}^n := span\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}|i = 1, \cdots, n\}.$$

Das heißt: Die holomorphen Vektorfelder sind genau diejenigen von der Form

$$Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i \frac{\partial}{\partial z_i}\ ,\ Z_i = X_i + iY_i \in \mathbb{C}\ i = 1, \cdots, n,$$

und die komplex-lineare Identifikation von $T_z^{(1,0)}\mathbb{C}^n$ mit $T_z\mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^n$ ist gegeben durch die Identität

$$Z \mapsto (Z_1, \cdots, Z_n) \in \mathbb{C}^n \cong T_z\mathbb{C}^n, \tag{3.1}$$

denn es gilt:

$$\begin{aligned} Z + \bar{Z} &= 2Re(Z) \\ &= 2\sum_{i=1}^{n} Re(Z_i \frac{\partial}{\partial z_i}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} Re\left\{(X_i\frac{\partial}{\partial x_i} + Y_i\frac{\partial}{\partial y_i}) + i(X_i\frac{\partial}{\partial x_i} - Y_i\frac{\partial}{\partial y_i})\right\} \\ &\overset{T_z\mathbb{C}^n\cong\mathbb{C}^n}{=} (Z_1, \cdots, Z_n). \end{aligned}$$

Eine Basis des komplexifizierten Kotangentialraumes ist gegeben durch:

$$dz_i := dx_i + idy_i, i = 1, \cdots, n,$$

$$d\bar{z}_i := dx_i - idy_i, i = 1, \cdots, n.$$

Und es ist offensichtlich

$$T^{\mathbb{C}(1,0)*}\mathbb{C}^n = span_{\mathbb{C}}\{dz_i|i = 1, \cdots, n\},$$

$$T^{\mathbb{C}(0,1)*}\mathbb{C}^n = span_{\mathbb{C}}\{d\bar{z}_i|i = 1, \cdots, n\}.$$

Insbesondere sind die gewählten Basen dual zueinander in dem Sinne, dass gilt:

$$dz_i\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right) = \delta_{ij},\ i, j = 1, \cdots, n,$$

$$d\overline{z_i}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}\right) = \delta_{ij},\ i, j = 1, \cdots, n.$$

Man beachte, dass es sich bei den Elementen aus $T^{\mathbb{C}*}\mathbb{C}^n$ nach wie vor um $\mathbb{R}$-Linearformen, jetzt aber mit Werten in $\mathbb{C}$, statt in $\mathbb{R}$, handelt.

Wichtig ist im Folgenden in Bezug auf die Komplexifizierung des Tangentialbündels vorallem das folgende Lemma:

Lemma 4. *Seien (V, J), $(\tilde{V}, \tilde{J})$ fast-komplexe Mannigfaltigkeiten und $f : V \to \tilde{V}$ eine $(J, \tilde{J})$-holomorphe Funktion. Dann ist das folgende Diagramm wohldefiniert und kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} TV & \xrightarrow{f_*} & T\tilde{V} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ T^{(1,0)}V & \xrightarrow{f_*} & T^{(1,0)}\tilde{V} \end{array}$$

wobei $f_* : T^{\mathbb{C}}V \to T^{\mathbb{C}}\tilde{V}$ die (eindeutige) $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung von $f_* : TV \to T\tilde{V}$ ist.

Beweis. Zunächst zeigt man, dass das Diagramm wohldefiniert ist, das heißt $f_*(T^{\mathbb{C}(1,0)}V) \subset T^{\mathbb{C}(1,0)}\tilde{V}$. Jedes Element aus $T^{\mathbb{C}(1,0)}V$ ist nach Lemma 3 von der Form $X - iJX$ mit $X \in TV$. Aus $(J, \tilde{J})$-Holomorphie von f folgt:

$$f_*(X - iJX) = f_*X - if_*(JX) = f_*X - i\tilde{J}(f_*X) \in T^{\mathbb{C}(1,0)}\tilde{V}$$

Das heißt, dass das Diagramm wohldefiniert ist. Die Kommutativität liest man sofort aus der Rechnung ab. □

3.4. **J-konvexe Funktionen.** Sei im Folgenden $\phi : V \to \mathbb{R}$ eine glatte reellwertige Funktion auf einer fast-komplexen Mannigfaltigkeit (V, J). Man definiert die Differentialoperatoren

$$d^J_{\mathbb{C}} : \Omega_0(V) \to \Omega_1(V)$$

$$d^J_{\mathbb{C}}\phi := d\phi \circ J,$$

$$\omega^J_{\phi} : \Omega_0(V) \to \Omega_2(V)$$

$$\omega^J_{\phi} := -dd^J_{\mathbb{C}}\phi,$$

wobei $\Omega_k(V)$ das Bündel der alternierenden k-Formen auf V bezeichne.

Definition 7. Eine glatte Funktion $\phi : V \to \mathbb{R}$ wird als *J-konvex in $p \in V$* bezeichnet genau dann, wenn

$$L^J_{\phi}(p; t) := \omega^J_{\phi}(t, J(p)t) > 0$$

für alle $0 \neq t \in T_pV$.
Man bezeichnet die quadratische Form L^J_{ϕ} auch als *Levi-Form* von ϕ bezüglich J.
Man nennt ϕ *J-konvex*, falls ϕ J-konvex für alle $p \in V$ ist.

Das J bei $d^J_{\mathbb{C}}$, ω^J_{ϕ}, L^J_{ϕ} wird im Folgenden auch manchmal weggelassen, wenn klar ist, um welches J es sich handelt.

Lemma 5. *Eine glatte Funktion $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ ist i-konvex genau dann, wenn die symmetrische komplexe $n \times n$-Matrix $\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\right)$ positiv definit ist.*

Beweis. In den Koordinaten $(z_1, \cdots z_n)$ auf $\mathbb{C}^n$ gilt unter Verwendung der Identitäten $dz_i \circ i = idz_i$, $d\bar{z}_i \circ i = -id\bar{z}_i$:

$$\begin{aligned}
\omega_\phi &= -dd_{\mathbb{C}}\phi \\
&= -d(d\phi \circ i) \\
&= -d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial z_i} dz_i \circ i + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i \circ i\right) \\
&= -d\left(\sum_{i=1}^{n} i\frac{\partial \phi}{\partial z_i} dz_i - i\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i\right) \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{z}_j \partial z_i} d\bar{z}_j \wedge dz_i - i\frac{\partial^2 \phi}{\partial z_j \partial \bar{z}_i} dz_j \wedge d\bar{z}_i \\
&= -2i \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i \wedge d\bar{z}_j
\end{aligned}$$

Sei nun $Z := (Z_1, \cdots, Z_n) \in \mathbb{C}^n \cong T_z\mathbb{C}^n$ ein beliebiger Tangentialvektor. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\omega_\phi(Z, iZ) &= -2i \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i \wedge d\bar{z}_j(Z, iZ) \\
&= -2i \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} iZ_i\bar{Z}_j + iZ_j\bar{Z}_i \\
&= 4 \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} Z_i\bar{Z}_j
\end{aligned}$$

Das heißt aber nichts anderes als $\omega_\phi(Z, iZ) > 0$ für alle $0 \neq Z \in T\mathbb{C}^n$ genau dann, wenn $(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j})$ positiv definit ist. $\square$

Bemerkung 5. Aus dem Beweis folgt, dass für die standard-fast-komplexe Struktur J_0 gilt:

$$\omega_\phi^{J_0} = -2i\partial\bar{\partial}\phi,$$

wobei $\partial\phi := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial z_i} dz_i$ und $\overline{\partial}\phi := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial \overline{z_i}} d\overline{z_i}$.
Diese Formel lässt sich nicht auf offensichtliche Art auf den Fall allgemeiner J-konvexer Funktionen verallgemeinern, da für nichtkonstantes J die Koeffizienten von ω_ϕ^J Ableitungen von J enthalten.

Für das Verhalten von L_ϕ unter $(J, \tilde{J})$-holomorphen Funktionen erhält man das folgende Lemma (siehe [8]):

Lemma 6. *Seien (V, J) und $(\tilde{V}, \tilde{J})$ fast-komplexe Mannigfaltigkeiten und $f : (V, J) \to (\tilde{V}, \tilde{J})$ eine glatte $(J, \tilde{J})$-holomorphe Funktion. Dann gilt: Ist $\phi : \tilde{V} \to \mathbb{R}$ eine glatte reellwertige Funktion in einer Umgebung von $f(p) \in \tilde{V}$, dann ist $\phi \circ f$ eine glatte reellwertige Funktion in einer Umgebung von $p \in \tilde{V}$ und L_ϕ erfüllt die Gleichung:*

$$L^J_{\phi \circ f}(p, X) = L^{\tilde{J}}_\phi(f(p), f_*(p)X) \quad \forall X \in T_pV$$

Beweis. Sei $X \in TV$ beliebig. Da f $(J,\tilde{J})$-holomorph ist gilt: $f_*(JX) = \tilde{J}(f_*X)$. Es folgt:

$$\begin{array}{rclcl} (f^*(d^{\tilde{J}}_{\mathbb{C}}\phi))(X) & = & d^{\tilde{J}}_{\mathbb{C}}\phi(f_*X) & = & d\phi(\tilde{J}(f_*X)) \\ & = & d\phi(f_*(JX)) & = & d(\phi \circ f)(JX) \\ & = & d^{J}_{\mathbb{C}}(\phi \circ f)(X). & & \end{array}$$

Das heißt: $f^*(d^{\tilde{J}}_{\mathbb{C}}\phi) = d^{J}_{\mathbb{C}}(\phi \circ f)$. Wendet man hierauf die Invarianz der äußeren Ableitung unter Pull-back an, so ergibt sich:

$$f^*(dd^{\tilde{J}}_{\mathbb{C}}\phi) = d(f^* d^{\tilde{J}}_{\mathbb{C}}\phi) = dd^{J}_{\mathbb{C}}(\phi \circ f).$$

Schließlich folgt die Behauptung durch erneutes anwenden der $(J,\tilde{J})$-Holomorphie von f:

$$\begin{array}{rclcl} \omega^{\tilde{J}}_{\phi}(f_*X, \tilde{J}(f_*X)) & = & -dd^{\tilde{J}}_{\mathbb{C}}\phi(f_*X, \tilde{J}(f_*X)) & = & -dd^{\tilde{J}}_{\mathbb{C}}\phi(f_*X, f_*(JX)) \\ & = & -f^*(dd^{\tilde{J}}_{\mathbb{C}}\phi)(X, JX) & = & -dd^{J}_{\mathbb{C}}(\phi \circ f)(X, JX) \\ & = & \omega^{J}_{\phi\circ f}(X, JX). & & \end{array}$$

Die Behauptung folgt sofort aus der Definition der Levi-Form L. □

3.5. **Diagonalisierung komplexer symmetrischer Matrizen.** Zunächst sei an den Spektralsatz für normale Endomorphismen erinnert:

Satz 1 (Spektralsatz für normale Endomorphismen)**.** *Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist unitär diagonalisierbar genau dann, wenn A normal ist. Das heißt: Es gibt ein $U \in U(n)$ mit $U^{-1}AU$ diagonal genau dann, wenn $AA^* = A^*A$.*

Ein Beweis findet sich in [2].
Hieraus folgt der Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen:

Definition 8. Sei für $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$

$$diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n},$$

beziehungsweise allgemeiner für Matrizen $A_i \in \mathbb{C}^{n_i\times n_i}$, $i = 1, \cdots, k$, $\sum_{i=1}^k n_i = n$

$$diag(A_1, \cdots, A_n) := \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

Satz 2 (Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen)**.** *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ selbstadjungiert, d.h. $A = A^*$. Dann ist A unitär diagonalisierbar und alle Eigenwerte $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ von A sind reell. Das heißt: Es existiert eine unitäre Matrix $U \in U(n)$, so dass $U^*AU = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.*

Beweis. A ist normal und somit nach dem Spektralsatz für normale Endomorphismen unitär diagonalisierbar. Das heißt: Es genügt zu zeigen, dass alle Eigenwerte von A reell sind. Sei hierzu v Eigenvektor zum Eigenwert λ, also $Av = \lambda v$. Dann gilt:

$$\lambda < v, v > = < Av, v > = < v, A^* v > = < v, Av > = \bar{\lambda} < v, v >$$

und somit $\lambda = \bar{\lambda}$, wobei $<,>$ das standard-hermitesche Produkt auf $\mathbb{C}^n$ ist. $\square$

Ähnlich zum Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen kann man auch symmetrische komplexe Matrizen mit Hilfe der Singulärwertzerlegung durch unitäre Matrizen diagonalisieren:

Definition 9. Die *Singulärwerte* $0 \leq d_1 \leq \cdots \leq d_n$ einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sind die Eigenwerte der positiv semidefiniten selbst-adjungierten Matrix $AA^* = (AA^*)^*$, wobei $A^* := \bar{A}^t$ die adjungierte Matrix zu A ist.

Satz 3 (Singulärwertzerlegung, Beweis siehe [6])**.** *Sei $\Sigma \in \mathbb{C}^{n \times n}$, mit Singulärwerten $0 \leq d_1 \leq \cdots \leq d_n$. Dann existieren $U, V \in U(n)$ mit $U \Sigma V = diag(d_1, \cdots d_n)$.*

Lemma 7. *Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonalisierbar. Dann existiert ein Polynom $p(\lambda)$, so dass $A = p(A^2)$.*

Beweis. Nehme zunächst an, dass A diagonal ist mit $A = diag(d_1, \cdots, d_n)$ und $d_1 < \cdots < d_n$ alle ungleich 0. Dann genügt es die Existenz einer Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems zu zeigen:

$$diag(d_1, \cdots, d_n) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i diag(d_1^{2i}, \cdots, d_n^{2i})$$

Diese existiert und ist eindeutig, wie man mit Hilfe der Vandermonde-Determinante sofort einsieht. Das heißt man erhält ein Polynom $p(\lambda)$ mit $A = p(A^2)$.
Sei nun A eine beliebige diagonale Matrix. Die Aussage folgt dann, indem man das Polynom p für die Diagonalmatrix A', auf deren Diagonalen jeder von 0 verschiedene Eigenwert von A genau einmal auftritt, bestimmt. Dieses erfüllt dann offensichtlich auch $A = p(A^2)$.
Sei schließlich A nicht diagonal. Dann existiert ein $S \in GL(n, \mathbb{C})$ mit $D_A := S^{-1} A S$ diagonal, da A diagonalisierbar ist. Dasselbe S diagonalisiert auch A^2 und man erhält $D_A^2 = S^{-1} A^2 S$. Insbesondere existiert ein Polynom $p(\lambda)$ mit $D_A = p(D_A^2)$. Man überzeugt sich leicht, dass dieses auch $A = p(A^2)$ erfüllt. $\square$

Satz 4 (Schur, siehe [3])**.** *Sei $A^t = A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine symmetrische komplexe Matrix und seien $0 \leq d_1 \leq \cdots \leq d_n$ ihre Singulärwerte. Dann existiert eine unitäre Matrix $U \in U(n)$, so dass gilt $U^t A U = diag(d_1, \cdots d_n)$.*

Beweis. Nach Singulärwertzerlegung gibt es unitäre Matrizen $U, V \in U(n)$ mit A=UDV und $D = diag(d_1, \cdots, d_n)$, wobei $0 < d_1 \leq \cdots \leq d_r, d_{r+1} = \cdots = d_n = 0$ die Singulärwerte von A sind.
Wegen Symmetrie von A gilt:

$$V^t D U^t = A^t = A = UDV$$

und somit:

$$WD = DW^t, \quad W := (V^{-1})^t U \in U(n).$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} WD^2W^* &= (WD)(WD)^* \\ &= (DW^t)(DW^t)^* \\ &= D(W^*W)^t D \\ &= D^2. \end{aligned}$$

Es folgt, dass W mit D^2 kommutiert ($W^* = W^{-1}$ für $W \in U(n)$), und damit insbesondere mit D, da D nach Lemma 7 als Polynom in D^2 geschrieben werden kann.
Stelle D dar als $D = diag(\Delta, 0, \cdots, 0)$ mit $\Delta := diag(d_1, \cdots, d_r)$ invertierbar. Kommutativität von W und D bedeutet $WD = DW$. Das heißt, dass W von der Form $W = diag(W_1, W_2)$ mit $W_1 \in GL(\mathbb{C}, r),\ W_2 \in GL(\mathbb{C}, (n-r))$ ist.
Weiter folgt aus $WD = DW$ und $WD = DW^t$, dass

$$\Delta W_1 = W_1 \Delta = \Delta W_1^t.$$

Das heißt, dass W_1 wegen Invertierbarkeit von Δ symmetrisch ist.
Wenn man jetzt U durch die ebenfalls unitäre Matrix $Udiag(\mathbb{1}_k, W_2^{-1})$ ersetzt, so bleibt die Eigenschaft $A = UDV$ erhalten und W wird zu $Wdiag(I, W_2^{-1})$, was nichts anderes heißt, als dass W_2 durch die Identität ersetzt wird. Das heißt W ist jetzt symmetrisch.
Es existiert eine Wurzel $W^{\frac{1}{2}}$, da W als unitäre Matrix normal und somit diagonalisierbar ist. Nach Lemma 7 existiert ein Polynom $p(\lambda)$, so dass $W^{\frac{1}{2}} = p(W)$ und somit kommutiert auch $W^{\frac{1}{2}}$ mit D. Also gilt:

$$\begin{aligned} A &= UDV & &= UD(W^{-1})^t U^t \\ &= UDW^{-1}U^t & &= UW^{-\frac{1}{2}} D W^{-\frac{1}{2}} \\ &= (UW^{-\frac{1}{2}}) D (UW^{-\frac{1}{2}})^t. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $UW^{-\frac{1}{2}}$ unitär als Produkt unitärer Matrizen. Benennt man $UW^{-\frac{1}{2}}$ um in U, so schließt dies den Beweis ab. □

Korollar 2 (siehe [3])**.** *Für zwei symmetrische komplexe Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gibt es eine unitäre Matrix U mit $U^t AU = B$ genau dann, wenn sie dieselben Singulärwerte haben.*

Beweis. Folgt direkt aus Satz 4. □

4. Lokale Normalform für i-konvexe Funktionen

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der lokalen Gestalt i-konvexer Funktionen in der Nähe eines kritischen Punktes. Daher genügt es hier $\mathbb{C}^n$, ausgestattet mit der standard-fast komplexen Struktur, zusammen mit einer i-konvexen Funktion $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$, die in 0 einen kritischen Punkt hat, zu betrachten. Weiter macht es Sinn $\phi(0) = 0$ zu verlangen, da i-Konvexität invariant unter Addition von Konstanten ist.
Ist der kritische Punkt nicht-degeneriert und lässt man beliebige Koordinatentransformationen zu, die den Ursprung invariant lassen, so besagt das Morse Lemma (siehe z.B. [7]), dass es in einer genügend kleinen Umgebung der 0 Koordinaten $(z_1, \cdots z_n)$ gibt, in denen

$$\phi(z_1, \cdots, z_n) = \pm x_1^2 \pm \cdots x_n^2 \pm y_1^2 \pm \cdots \pm y_n^2$$

gilt. Es macht jedoch keinen Sinn dieses auf allgemeine i-konvexe Funktionen anzuwenden, da diese degenerierte kritische Punkte besitzen können und es außerdem sinnvoll ist zu verlangen, dass die Koordinatentransformationen die fast-komplexe Struktur i erhalten. Das heißt nach Lemma 2, dass man nur holomorphe Koordinatentransformationen zulässt, die den Ursprung erhalten.

4.1. Lokale Normalform für die Terme 2. Ordnung.

Zunächst sollen nur die Terme 2. Ordnung untersucht werden. Für diese erhält man die folgende Normalform:

Satz 5. *Sei $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ eine i-konvexe Funktion mit $\phi(0) = 0$, $d\phi(0) = 0$, d.h. ϕ hat in 0 einen kritischen Punkt. Dann existieren holomorphe Koordinaten $(w_1, \cdots, w_n)$, so dass ϕ bezüglich dieser Koordinaten die Form*

$$\phi(w_1, \cdots, w_n) = |w|^2 + Re(w^t D w) + \mathcal{O}(|w|^3)$$

hat, wobei $D = diag(d_1, \cdots, d_n)$ mit $0 \le d_1 \le \cdots \le d_n$ und $|\cdot|$ die vom standard-hermiteschen Skalarprodukt induzierte Norm auf $\mathbb{C}^n$ ist.

Beweis. Wähle beliebige komplexe Koordinaten $(z_1, \cdots, z_n)$ auf $\mathbb{C}^n$ und betrachte in diesen Koordinaten die Taylorentwicklung von ϕ um 0:

$$\begin{aligned} \phi(z_1, \cdots, z_n) &= \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{i,j=1}^n \left[2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(0) z_i \bar{z}_j + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z_i \partial z_j}(0) z_i z_j \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{z}_i \partial \bar{z}_j}(0) \bar{z}_i \bar{z}_j \right] + \mathcal{O}(|z|^3) \\ &= \textstyle\sum_{i,j=1}^n \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(0) z_i \bar{z}_j + Re\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z_i \partial z_j}(0) z_i z_j \right) \right] + \mathcal{O}(|z|^3). \end{aligned}$$

Das heißt, dass

$$\phi(z) = \bar{z}^t A z + Re(z^t B z) + \mathcal{O}(|z|^3) \tag{4.1}$$

mit $A := \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ selbstadjungiert und positiv definit nach Lemma 5 und $B := \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z_i \partial z_j} \right) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ symmetrisch.
Betrachte zunächst das Verhalten von ϕ unter einer allgemeinen komplex-linearen Koordinatentransformation $z = Sw$, $S \in GL(\mathbb{C}; n)$:

$$\begin{aligned} \phi(w) &= \overline{(Sw)}^t A(Sw) + Re((Sw)^t B(Sw)) + \mathcal{O}(|w|^3) \\ &= \bar{w} S^* A S w + Re(w^t S^t B S w) + \mathcal{O}(|w|^3). \end{aligned}$$

Das heißt, dass A zu S^*AS und B zu S^tBS wird. Insbesondere ist S^*AS selbstadjungiert und positiv definit und S^tBS symmetrisch.
Nach Satz 2 existiert ein $U \in U(n)$, so dass $U^*AU = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ diagonal ist mit $\lambda_1, \cdots, \lambda_n > 0$ den Eigenwerten von A. Diese sind alle echt positiv, da A positiv definit ist. Also hat ϕ bezüglich der Koordinaten z=Uw die Form:

$$\phi(w) = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) + Re(w^t B_w w) + \mathcal{O}(|w|^3)$$

mit $B_w = U^t BU$.
Eine weitere lineare Koordinatentransformation der Form

$$w = diag(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}})v$$

ergibt dann:

$$\phi(v) = |v|^2 + Re(v^t B_v v) + \mathcal{O}(|v|^3)$$

mit $B_v := diag(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}})B_w diag(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}})$.
Da B_v symmetrisch ist kann man schließlich Satz 4 anwenden und erhält ein $V \in U(n)$, so dass

$$V^t B_v V = diag(d_1, \cdots, d_n)$$

mit $0 \leq d_1, \cdots \leq d_n$ die (nicht negativen) Singulärwerte von B_v. Unter der Koordinatentransformation $v = Vu$ erhält man somit wegen $(Uu)^*(Uu) = u^*U^*Uu = u^*u = |u|^2$:

$$\phi(u) = |u|^2 + Re(u^t diag(d_1, \cdots, d_n)u) + \mathcal{O}(|u|^3).$$

Also haben die Koordinaten $(u_1, \cdots, u_n)$ die gewünschten Eigenschaften. □

Bemerkung 6. Aus Gleichung (4.1) ist ersichtlich, dass die Transformation der Terme zweiter Ordnung unter einer holomorphen Koordinatentransformation, die den Ursprung erhält, allein vom linearen Anteil der Koordinatentransformation abhängig ist.

Korollar 3. *Gegeben $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ i-konvex mit kritischem Punkt in 0. Dann gibt es genau eine Matrix $D = diag(d_1, \cdots, d_n)$ mit den Eigenschaften $0 \leq d_1 \leq \cdots \leq d_n$ und $\phi(z_1, \cdots, z_n) = |z|^2 + Re(z^t Dz) + \mathcal{O}(z^3)$ in geeigneten holomorphen Koordinaten.*

Beweis. Nach Satz 5 existiert eine Matrix D und geeignete Koordinaten mit diesen Eigenschaften. Weiter wird der $(|z|^2 + \mathcal{O}(|z|^3))$-Anteil offenbar genau von den holomorphen Koordinatentransformationen der Form

$$f(z) = Uz + \mathcal{O}(|z|^2)$$

mit U unitär erhalten.
Angenommen es gibt eine weitere Matrix $D' = diag(d'_1, \cdots, d'_n)$ mit denselben Eigenschaften. Dann existiert eine holomorphe Koordinatentransformation, deren linearer Anteil durch ein unitäres U gegeben ist, so dass $D' = U^t DU$. Nach Korollar 2 haben dann D' und D die gleichen Singulärwerte. Da die Diagonalelemente beider Matrizen positiv sind, sind diese aber gerade durch die Diagonalelemente von D und D' gegeben und weil weiter $0 \leq d_1 \leq \cdots \leq d_n$, so wie $0 \leq d'_1 \leq \cdots \leq d'_n$ angenommen wurde folgt $D = D'$. □

Korollar 4. *Sei $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ i-konvex mit kritischem Punkt in 0 und seien $(z_1, \cdots, z_n)$ Koordinaten mit $\phi(z_1, \cdots, z_n) = |z|^2 + Re(z^t Dz) + \mathcal{O}(z^3)$ für ein passendes $D = diag(d_1, \cdots, d_n)$.*
Nimmt man an, dass gilt: $0 < d_1 < d_2 < \cdots < d_n$, so werden die Terme 2. Ordnung genau von den holomorphen Koordinatentransformationen der Form $f(z) = (\pm z_1, \cdots, \pm z_n) + \mathcal{O}(z^2)$ erhalten.

Beweis. Aus dem Beweis von Korollar 3 folgt sofort, dass $f(z) = Uz + \mathcal{O}(|z|^2)$ mit U unitär.
Sei also U unitär mit $U^t DU = D$. Wegen D reellwertig gilt dann:

$$D = \bar{D} = \bar{U}^t D\bar{U} = U^* D\bar{U}.$$

Hieraus folgt:

$$D^2 = D\bar{D} = U^t DUU^* D\bar{U} = U^t D^2 \bar{U}.$$

Das heißt also:

$$D^2 = \overline{D}^2 = U^* D^2 U = U^{-1} D^2 U$$

und somit kommutiert D^2 mit U.
Es folgt, dass die Eigenräume von D^2 invariant unter U sind, denn:

$$D^2 v = \lambda v \Rightarrow D^2 Uv = UD^2 v = U\lambda v = \lambda Uv$$

Wegen Diagonalität von D sind die Eigenräume von D^2 aber gerade durch $span\{e_1\}, \cdots, span\{e_n\}$ gegeben mit $(e_1, \cdots, e_n)$ der kanonischen Basis von $\mathbb{C}^n$.
Demzufolge gilt:

$$Ue_i = \lambda_i e_i \ \forall \ i$$

mit passenden $\lambda_i \in \mathbb{C}$.
Also ist U ebenfalls diagonal und aus $U^t DU = D$ folgt sofort:

$$\lambda_i = \pm 1 \ \forall \ i$$

$$\Rightarrow U = diag(\pm 1, \cdots, \pm 1).$$

□

Bemerkung 7. Analog kann man zeigen, dass für $D = diag(d_1, \cdots, d_n)$ mit $0 \leq d_1 = \cdots = d_{l_1} < d_{l_1+1} = \cdots = d_{l_2} < \cdots < d_{l_r} = \cdots = d_n$ die Diffeomorphismen, die die lokale Normalform erhalten, genau die holomorphen Funktionen der Form:

$$f(z) = diag(U_1, O_2 \cdots, O_r)z + \mathcal{O}(|z|^2)$$

mit $U_1 \in U(l_1)$ und $O_i \in O(l_i)$ sind.

4.2. **Lokale Normalform für die Terme höherer Ordnung.** Um die Frage zu klären, ob es eine gute Normalform für die Terme höherer Ordnung, das heißt Terme der Ordnung größer als zwei, gibt, genügt es nach Korollar 4, wenn man sich auf in einer Umgebung der 0 biholomorphe Funktionen $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ mit $f(z) = z + \mathcal{O}(|z|^2)$ beschränkt. Man stellt fest, dass man für die Terme dritter Ordnung den nicht-harmonischen Anteil wegtransformieren kann, während für Terme vierter und höherer Ordnung auch das nicht möglich ist.

Satz 6. *Sei $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ i-konvex mit $\phi(z) = |z|^2 + Re(z^t Dz) + \mathcal{O}(|z|^3)$ und $D = diag(d_1, \cdots, d_n)$, $0 \le d_1 \le \cdots \le d_n$.*
Dann gibt es in einer Umgebung der 0 eine holomorphe Koordinatentransformationen der Form

$$z_i = w_i + \sum_{j,k=1}^{n} c_{ijk} w_j w_k + \mathcal{O}(|w|^3),$$

so dass ϕ bezüglich der Koordinaten $(w_1, \cdots, w_n)$ die folgende Form hat:

$$\phi(w) = |w|^2 + Re(w^t Dw) + Re\left(\sum_{i,j,k=1}^{n} d_{ijk} w_i w_j w_k\right) + \mathcal{O}(|w|^4),\ b_{ijk} \in \mathbb{C}$$

Verlangt man zusätzlich, dass die $c_{ijk} \in \mathbb{C}$ in j und k symmetrisch sind, so sind sie durch ϕ bereits eindeutig festgelegt.

Beweis. Taylorentwicklung bis zur dritten Ordnung um 0 ergibt:

$$\phi(z) = |z|^2 + Re(z^t Dz) + Re\left(\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{ijk} z_i z_j z_k + b_{ijk} \overline{z_i} z_j z_k\right) + \mathcal{O}(|z|^4)$$

mit passenden $a_{ijk}, b_{ijk} \in \mathbb{C}$, wobei man annehmen kann, dass $b_{ijk} = b_{ikj}$ gilt, wodurch die b_{ijk} insbesondere eindeutig werden.
Diese Terme transformieren unter $z_i = w_i + \sum_{j,k=1}^{n} c_{ijk} w_j w_k + \mathcal{O}(|w|^3)$ zu:

$$\begin{aligned}\phi(z) \;=\;& |w|^2 + Re(w^t Dw) + 2\textstyle\sum_{i,j,k=1}^{n} Re\left[(d_i c_{ijk} + \frac{a_{ijk}}{2}) w_i w_j w_k\right] \\ & +2\textstyle\sum_{i,j,k=1}^{n} Re\left[(c_{ijk} + \frac{b_{ijk}}{2})\overline{w_i} w_j w_k\right] + \mathcal{O}(|w|^4).\end{aligned}$$

Also erhält man eindeutige $c_{ijk} := -\frac{b_{ijk}}{2}$ mit $c_{ijk} = c_{ikj}$ und

$$\phi(w) = |w|^2 + Re(w^t Dw) + Re(\sum_{i,j,k=1}^{n} d_{ijk} w_i w_j w_k) + \mathcal{O}(|w|^4),$$

wobei die d_{ijk} passend gewählt werden. □

Bei den Termen k-ter Ordnung mit $k \ge 4$ kann man nach demselben Prinzip eine der Summen eliminieren. Mehr ist jedoch nicht möglich, wie man im folgenden Beispiel für die Terme vierter Ordnung sieht.

Beispiel 3. Betrachte die i-konvexe Funktion $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$\phi(z = x + iy) = |z|^2 + Re(z^2) + Re(2z^4 + z^3 \bar{z} + |z|^4).$$

Sei weiter

$$z = aw + bw^2 + cw^3 + \mathcal{O}(|w|^4)$$

mit $a, b, c \in \mathbb{C}$ eine beliebige holomorphe Koordinatentransformation in einer Umgebung der 0. Dann rechnet man leicht nach, dass ϕ bzgl. w die folgende Form hat:

$$\begin{aligned}\phi(w) \;=\;& |a|^2|w|^2 + Re\left(a^2 w^2\right) + 2Re\left(a\bar{b}w\bar{w}^2 + abw^3\right) + Re\left((2 + 2c + b^2)w^4\right) \\ & +Re\left((1 + 2c)w^3\bar{w}\right) + Re\left((1 + |b|^2)|w|^4\right) + \mathcal{O}(|w|^5).\end{aligned}$$

Will man jetzt, dass die Terme zweiter Ordnung erhalten bleiben und keine Terme der Form $w\bar{w}^2$ auftreten, so folgt sofort $a = \pm 1, b = 0$. Unter dieser Annahme hat man:

$$\phi(w) = |w|^2 + Re(w^2) + Re((2+2c)w^4 + (1+2c)w^3\bar{w} + |w|^4) + \mathcal{O}(|w|^5).$$

Man sieht, dass die Terme der Form $|w|^4$ erhalten bleiben und man nur einen der Terme, die durch w^4 und $w^3\bar{w}$ entstehen, wegtransformieren kann. Insbesondere sind die Terme vierter Ordnung dann nicht mehr harmonisch, wie man leicht nachrechnet.

Es stellt sich natürlicherweise die Frage, inwiefern es möglich ist eine lokale Normalform für allgemeine J-konvexe Funktionen in kritischen Punkten anzugeben. Wie in Kapitel 2 erwähnt wurde, ist nicht jede fast-komplexe Mannigfaltigkeit komplex und man kann somit die Resultate für i-konvexe Funktionen nicht direkt auf J-konvexe Funktionen verallgemeinern. Bei genauerer Betrachtung fällt auf, dass beim Versuch einer direkten Verallgemeinerung die folgenden beiden Probleme auftreten:

(1) Aus Bemerkung 5 wird deutlich, dass aus der J-Konvexität im Allgemeinen nicht direkt folgt, dass die Matrix $\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z_i \partial \bar{z_j}}\right)$ positiv definit ist.
(2) Wie am Ende von Kapitel 3.2 thematisiert wird, ist im Allgemeinen der Raum der (J, J)-holomorphen Diffeomorphismen auf einer Umgebung der 0 gegenüber dem Raum der standard-holomorphen Diffeomorphismen auf einer Umgebung der 0 klein und hat insbesondere keine schöne Darstellung.

Die beiden Schwierigkeiten lassen sich lösen, indem man zeigt, dass es lokale Koordinaten gibt, bezüglich derer J eine lokale Normalform hat, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(1) ϕ J-konvex in $0 \Leftrightarrow \phi$ i-konvex in 0
(2) diese Eigenschaft ist erhalten unter komplex-linearen Koordinatentransformationen

Unter diesen Umständen kann man die Theorie zur lokalen Normalform i-konvexer Funktionen anwenden. Das Ziel der nächsten beiden Abschnitte ist es zu zeigen, dass solche Koordinaten tatsächlich existieren.

5. J-holomorphe Kurven

Sei $D_r^n(0) \subset \mathbb{C}^n$ der offene Ball vom Radius r um 0 in $\mathbb{C}^n$ und $D_r(0) := D_r^1(0) \subset \mathbb{C}$ der offene Ball vom Radius r um 0 in $\mathbb{C}$. Sei weiter $||\cdot||_{C^\alpha(U)}$, $0 < \alpha \in \mathbb{R}$, die Höldernorm auf den glatten Funktionen $U \to \mathbb{R}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $U \subset \mathbb{C}^n$.
Das folgende Lemma zeigt, dass man jede fast-komplexe Struktur J lokal als eine kleine Deformation der standard-komplexen Struktur J_0 auffassen kann (siehe [8]):

Lemma 8. *Sei (V, J) eine fast komplexe Mannigfaltigkeit und seien $\alpha, \lambda_0 > 0$ beliebig. Dann existiert für jeden Punkt $p \in M$ eine Umgebung $U \subset V$, so wie lokale Koordinaten $z : U \overset{\cong}{\to} D_1^n(0) \subset \mathbb{C}^n$, so dass $z(p) = 0$ und für $z_*(J) := z_* \circ J \circ z_*^{-1}$ gilt:*
- $z_*(J)(0) = J_0$
- $||z_*(J) - J_0||_{C^\alpha\left(\overline{D_1^n(0)}\right)} \le \lambda_0$

Beweis. Nach Proposition 2 existieren lokale Koordinaten z auf M, so dass bezüglich dieser Koordinaten $z_*(J)(0) = J_0$ gilt.
Sei für $\mu > 0$

$$\begin{aligned} d_\mu : \mathbb{C}^n &\to \mathbb{C}^n \\ z &\mapsto \frac{1}{\mu} z \end{aligned}$$

die Streckung um den Faktor $\frac{1}{\mu}$. Setze $z_\mu := d_\mu \circ z$. Man rechnet leicht nach, dass für glattes z gilt:

$$\lim_{\mu\to 0} ||(z_\mu)_*(J) - J_0||_{C^\alpha\left(\overline{D_1^n(0)}\right)} = 0.$$

Wählt man also U:=$z_\mu^{-1}(D_1^n(0))$, mit μ groß genug, so folgt die Behauptung. □

Definition 10. Sei (V, J) eine fast-komplexe Mannigfaltigkeit. Unter einer *J-holomorphen Kurve* durch einen Punkt $p \in V$ versteht man eine (i, J)-holomorphe Funktion $z : U \subset \mathbb{C} \to V$ mit $0 \in U \subset \mathbb{C}$ offen und $z(0) = p$.

Da man hier nur an lokalen Eigenschaften J-holomorpher Kurven interessiert ist, genügt es bei der weiteren Betrachtung anzunehmen, dass man sich auf $\mathbb{C}^n$, ausgestattet mit einer fast-komplexen Struktur J, befindet. Weiter kann nach Lemma 8 angenommen werden, dass $J(0) = J_0$ und dass für ein beliebig großes aber festes $\alpha > 0$ gilt: $||J - J_0||_{C^\alpha\left(\overline{D_1^n(0)}\right)} \le \lambda_0 << 1$.
Der Begriff J-holomorpher Kurven hat in der lokalen Theorie J-konvexer Funktionen auf Grund des folgenden Lemmas (siehe [8]) eine große Bedeutung:

Lemma 9. *Betrachte $\mathbb{C}^n$, ausgestattet mit einer fast-komplexen Struktur J. Sei $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte reellwertige Funktion und $t \in T_0^{(1,0)}\mathbb{C}^n$. Sei weiter $z : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ eine J-holomorphe Kurve durch $0 \in \mathbb{C}^n$ mit $z_*(0)\frac{\partial}{\partial\zeta} = \frac{\partial z}{\partial\zeta}(0) = t$.*
Dann gilt:

$$L_\phi^J(0; t) = L_{\phi\circ z}^i(0; \frac{\partial}{\partial\zeta}),$$

wobei $L^J_\phi(0;t) := L^J_\phi(0;2Re(t))\ \forall\ t \in T^{(1,0)}_0\mathbb{C}^n$ *mit Hilfe der Identifikation* $T_0\mathbb{C}^n \cong T^{(1,0)}_0\mathbb{C}^n$ *aus Lemma 3 definiert wird.* $L^i_{\phi\circ z}$ *wird analog definiert.*

Beweis. Nach Lemma 6 gilt für $X \in T_0\mathbb{C}^n$:

$$L^J_\phi(0;X) = L^i_{\phi\circ z}(0;z_*(0)X).$$

Wegen Lemma 4 kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} T\mathbb{C} & \xrightarrow{z_*} & T\mathbb{C}^n \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ T^{(1,0)}\mathbb{C} & \xrightarrow{z_*} & T^{(1,0)}\mathbb{C}^n \end{array}$$

Das heißt aber:

$$\begin{aligned} L^J_\phi(0;t) &= L^J_\phi(0;2Re(t)) &&= L^i_\phi(0;z_*(0)(2Re(t))) \\ &= L^i_{\phi\circ z}(0;2Re(z_*(0)t)) &&= L^i_{\phi\circ z}(0;z_*(0)t) \\ &= L^i_{\phi\circ z}(0;\tfrac{\partial}{\partial\zeta}) \end{aligned}$$

□

Um ein besseres Verständnis J-holomorpher Kurven zu erhalten formuliert man die definierende Differentialgleichung $z_* \circ J_0 = J \circ z_*$ für eine J-holomorphe Kurve $z : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ mit $z(0) = 0$ um. Hierbei orientieren wir uns an [10]:

Durch Einsetzen der Basisvektoren $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial y}$ erhält man die beiden Gleichungen

$$z_*\frac{\partial}{\partial y} = Jz_*\frac{\partial}{\partial x}, -z_*\frac{\partial}{\partial x} = Jz_*\frac{\partial}{\partial y}.$$

Wegen $J^2 = -\mathbb{1}$ sind diese äquivalent und es ist somit z J-holomorph genau dann, wenn

$$z_*\frac{\partial}{\partial y} = Jz_*\frac{\partial}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = J\frac{\partial z}{\partial x}. \tag{5.1}$$

Wie in Kapitel 3.3 setzt man

$$\frac{\partial z}{\partial\zeta} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - i\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - J_0\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

und

$$\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial x} + i\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial x} + J_0\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen aus der Identifizierung von $\mathbb{C}^n$ mit $\mathbb{R}^{2n}$ folgt und hier J_0 die auf $\mathbb{C}^n$ zurückgezogene standard-komplexe Strukutur bezeichnet.

Dann gilt aber:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial\zeta} + \frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = J_0\left(\frac{\partial z}{\partial\zeta} - \frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\right)$$

Setzt man dies in Gleichung (5.1) ein, so erhält man:

$$(J_0 + J)(\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}) = (J_0 - J)\left(\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right). \tag{5.2}$$

Hieraus folgt die folgende partielle Differentialgleichung für J-holomorphe Kurven durch die 0 in $\mathbb{C}^n$:

Lemma 10. *Wähle lokale Koordinaten wie in Lemma 8 mit α groß genug und $\lambda_0 << 1$. Dann gilt:*
Eine komplexe Kurve $z : U \subset \mathbb{C} \to D_1^n(0)$ mit $z(0) = 0$ ist J-holomorph genau dann, wenn

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} = Q(z) \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}},$$

wobei $Q(z)$ die durch

$$Q(z)\bar{v} := (J_0 + J(z))^{-1}(J_0 - J(z))v \ \forall \ v \in T_z\mathbb{C}^n \tag{5.3}$$

definierte komplex-lineare Abbildung ist.

Beweis. Zu überprüfen ist, dass $(J_0 + J(z(\zeta)))$ invertierbar für alle $\zeta \in U$ ist und dass $Q(z)$ tatsächlich komplex-linear ist. Alles andere folgt sofort aus Gleichung (5.2).
Per Vorraussetzung ist $||J - J_0||_{C^\alpha(D_1^n(0))} << 1$ für ein großes α. Hieraus folgt sofort, dass $J + J_0$ nah bei $2J_0$ liegt und somit invertierbar ist, weil Invertierbarkeit eine offene Bedingung ist und J_0 invertierbar ist.
Um zu zeigen, dass $Q(z)$ für alle $z \in D_1^n(0)$ komplex-linear ist, genügt es offensichtlich zu zeigen, dass $\bar{Q}(z) := (J_0 + J(z))^{-1}(J_0 - J(z))$ für alle $z \in D_1^n(0)$ komplex-antilinear ist. Das heißt es genügt zu zeigen, dass gilt:

$$\bar{Q}(z)J_0 = -J_0\bar{Q}(z).$$

$J^2 = J_0^2 = -\mathbb{1}$ und Invertierbarkeit von $(J_0 + J)$ ergeben:

$$(J_0 + J)J_0 = J(J_0 + J)$$

$$\Rightarrow -J_0(J_0 + J)^{-1} = -(J_0 + J)^{-1}J$$

und

$$(J_0 - J)J_0 = -J(J_0 - J).$$

Setzt man dies zusammen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \bar{Q}(z)J_0 &= (J_0 + J)^{-1}(J_0 - J)J_0 \\ &= -(J_0 + J)^{-1}J(J_0 - J) \\ &= -J_0(J_0 + J)^{-1}(J_0 - J) \\ &= -J_0\bar{Q}(z) \end{aligned}$$

□

Das heißt, dass jede fast-komplexe Struktur J eine komplex-lineare Abbildung Q definiert, in der alle Informationen über J-holomorphe Kurven gespeichert sind.
Umgekehrt definiert jeder glatte Schnitt Q im Bündel der komplex-linearen Endomorphismen auf $T\mathbb{C}^n$ mit $Q(0) = 0$ durch Auflösen von Gleichung (5.3) nach J, eine fast komplexe Struktur J in einer Umgebung der 0. Diese ist gegeben durch:

$$J(z) = J_0(\mathbb{1} - \bar{Q}(z))(\mathbb{1} + \bar{Q}(z))^{-1}$$

und es handelt sich tatsächlich um eine fast komplexe Struktur, da aus $\bar{Q}J_0 = -J_0\bar{Q}$ folgt:

$$\begin{aligned} J(z)^2 &= J_0 \left[\mathbb{1} - \bar{Q}(z)\right] \left[\mathbb{1} + \bar{Q}(z)\right]^{-1} J_0 \left[\mathbb{1} - \bar{Q}(z)\right] \left[\mathbb{1} + \bar{Q}\right]^{-1} \\ &= \left[\mathbb{1} - \bar{Q}(z)\right] J_0 \left[\mathbb{1} + \bar{Q}(z)\right]^{-1} \left[\mathbb{1} - \bar{Q}(z)\right] J_0 \left[\mathbb{1} + \bar{Q}\right]^{-1} \\ &= -\mathbb{1}. \end{aligned}$$

Insbesondere erhält man also eine eins-zu-eins Korrespondenz zwischen fast-komplexen Strukturen, die nahe bei J_0 liegen, und glatten komplex-linearen Schnitten im Endomorphismenbündel von $T\mathbb{C}^n$, die nahe bei 0 liegen.

Im Kontext J-holomorpher Kurven stellt sich die Frage, ob zu gegebenen Anfangsbedingungen eine J-holomorphe Kurve existiert. Diese wird durch das folgende Theorem von Nijenhuis und Woolf beantwortet:

Theorem 4 (Nijenhuis-Woolf)**.** *Sei J eine fast-komplexe Struktur in einer Umgebung V der 0 in $\mathbb{C}^n$ mit $J(0) = J_0$ und sei $v \in \mathbb{C}^n \cong T^{(1,0)\mathbb{C}^n}$.*
Dann existiert eine, auf einer Umgebung $U \subset \mathbb{C}$ der 0 definierte, J-holomorphe Kurve $z : U \subset \mathbb{C} \to V$ mit $z(0) = 0$ und $\frac{\partial z}{\partial \zeta} = v$.

Ein Beweis hierfür findet sich in [9].

6. Lokale Normalform fast-komplexer Strukturen

In diesem Kapitel wird gezeigt, dass es eine Normalform für J gibt mit der Eigenschaft, dass J-Konvexität und i-Konvexität in 0 bezüglich dieser dasselbe sind.

In Kapitel 5 wurde gezeigt, dass jede J-holomorphe Kurve $z : U \subset \mathbb{C} \to D_1^n(0)$ durch 0 Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} + Q(z(\zeta))\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} = 0 \tag{6.1}$$

ist, wobei $Q(z)$ eine $J(z)$ eindeutig zugeordnete $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $T_z\mathbb{C}^n \to T_z\mathbb{C}^n$ mit $Q(0) = 0$ ist.

Definition 11. Bezeichne für eine Funktion $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^k$ im Folgenden f_z den Anteil der totalen Ableitung von f in z-Richtung und $f_{\bar{z}}$ den Anteil der totalen Ableitung in $\bar{z}$-Richtung. Das heißt, dass für $p \in U$ und $v = (v_1, \cdots, v_n) \in \mathbb{C}^n \cong T_p\mathbb{C}^n$ gilt:

$$f_z(p)v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i} v_i,$$

$$f_{\bar{z}}(p)v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} \bar{v}_i.$$

Das folgende Lemma (siehe [8]) liefert eine nützliche lokale Normalform für Q:

Lemma 11. *Sei J eine fast-komplexe Struktur auf einer kleinen Umgebung U der 0 in $\mathbb{C}^n$. Dann existiert ein lokaler Diffeomorphismus Φ in einer Umgebung $U' \subset U$ der 0, so dass die $\tilde{J} := \Phi_* J$ durch Gleichung (5.3) eindeutig zugeordnete $\mathbb{C}^{n\times n}$-wertige Funktion $\tilde{Q}$ erfüllt:*

$$\tilde{Q}(0) = 0, \tilde{Q}_{\tilde{z}}(0) = 0,$$

wobei $\tilde{z} := \Phi(z)$.
Man kann Φ von der Form $\Phi(z) = z + \sum_{i,j=1}^{n} \phi_{kj} z_k \bar{z}_j$ mit $\phi_{kj} \in \mathbb{C}^n$ wählen.

Beweis. Sei $z : D_r(0) \to U$ eine J-holomorphe Kurve in U. Setze $\tilde{z}(\zeta) := \Phi(z(\zeta))$. Dann ist $\tilde{z}$ eine $\tilde{J}$-holomorphe Kurve und erfüllt somit Gleichung (6.1) für $\tilde{J}$-Holomorphie, wobei anstelle von Q jetzt natürlich $\tilde{Q}$ steht.
Um ein geeignetes Φ zu bestimmen stellt man zunächst eine Beziehung zwischen Q und $\tilde{Q}$ her. Hierfür berechnet man zunächst die partiellen Ableitungen von $\tilde{z}$ mit Hilfe von Gleichung (6.1) für J-Holomorphie von z:

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial \zeta} = \frac{\partial((\Phi \circ z)(\zeta))}{\partial \zeta} = \Phi_z \frac{\partial z}{\partial \zeta} + \Phi_{\bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \overline{\frac{\partial \tilde{z}}{\partial \zeta}} &= \overline{\Phi_z} \overline{\frac{\partial z}{\partial \zeta}} - \overline{\Phi_{\bar{z}}} Q \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} \\ &= \left(\bar{\Phi}_{\bar{z}} - \bar{\Phi}_z Q\right) \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}}\end{aligned}$$

und:

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial((\Phi \circ z)(\zeta))}{\partial \bar{\zeta}} = \Phi_z \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} + \Phi_{\bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}}$$
$$= (-\Phi_z Q + \Phi_{\bar{z}}) \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}}.$$

Diese setzt man jetzt in die Gleichung für $\tilde{J}$-Holomorphie von $\tilde{z}$ ein und erhält:

$$(-\Phi_z Q + \Phi_{\bar{z}}) \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} + \tilde{Q} \left(\bar{\Phi}_{\bar{z}} - \bar{\Phi}_z Q\right) \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} = 0$$

für jede J-holomorphe Kurve z.
Wegen Theorem 4 (Nijenhuis-Woolf) gibt es für beliebiges $p \in \mathbb{C}^n$, $t \in \mathbb{C}^n \cong T_p\mathbb{C}^n$ eine J-holomorphe Kurve mit $z(0) = p$ und $\frac{\partial z}{\partial \zeta}(p) = t$ und es folgt sofort, dass

$$(-\Phi_z Q + \Phi_{\bar{z}}) + \tilde{Q}(\bar{\Phi}_{\bar{z}} - \bar{\Phi}_z Q) \equiv 0.$$

Diese Gleichung lässt sich nach $\tilde{Q}$ auflösen, sofern $\bar{\Phi}_{\bar{z}} - \bar{\Phi}_z Q$ invertierbar ist. Dies ist offensichtlich in einer kleinen Umgebung der 0 erfüllt genau dann, wenn der komplex-lineare Anteil von Φ von der Form Cz mit $C \in GL(n, \mathbb{C}^n)$ ist, da Q glatt ist mit $Q(0) = 0$. Unter diesen Vorraussetzungen ist also:

$$\tilde{Q} = (\Phi_z Q - \Phi_{\bar{z}})(\bar{\Phi}_{\bar{z}} - \bar{\Phi}_z Q)^{-1}$$

Sei nun $\Phi(z) = z + \sum_{k,j=1}^{n} \phi_{kj} z_k \bar{z}_j$, wie oben beschrieben. Dann gilt:

$$\Phi_z = \mathbb{1} + \mathcal{O}(|z|),$$
$$\Phi_{\bar{z}} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{\Phi_k} z_k,$$

mit Matrizen $\mathbf{\Phi_k} = (\phi^s_{kj}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$.
Andererseits hat die Taylorentwicklung von Q um 0 die Form:

$$Q(z) = A(z) + B(\bar{z}) + \mathcal{O}(|z|^2)$$

mit:

$$A(z) = \sum_{k=1}^{n} A_k z_k,$$
$$B(\bar{z}) = \sum_{k=1}^{n} B_k \bar{z}_k,$$

wobei $A_k, B_k \in \mathbb{C}^{n\times n}$.
Setzt man das in den Ausdruck für $\tilde{Q}$ ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(z) &= \left((\mathbb{1} + \mathcal{O}(|z|)) \left(A(z) + B(\bar{z}) + \mathcal{O}(|z|^2)\right) - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{\Phi_k} z_k \right) \cdot \\ &\quad \left(\mathbb{1} + \mathcal{O}(|z|) - \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathbf{\Phi_k}} \left(A(z) + B(\bar{z}) + \mathcal{O}(|z|^2)\right) \right)^{-1} \\ &= \left(A(z) + B(\bar{z}) - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{\Phi_k} z_k + \mathcal{O}(|z|^2) \right) (\mathbb{1} + \mathcal{O}(|z|))^{-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (A_k - \mathbf{\Phi_k}) z_k + B(\bar{z}) + \mathcal{O}(|z|^2).\end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen folgt sofort durch Taylorentwicklung von $(\mathbb{1} + \mathcal{O}(|z|))^{-1}$ um 0 mit Hilfe der Bedingung $(\mathbb{1} + \mathcal{O}(|z|))^{-1}(\mathbb{1} + \mathcal{O}(|z|)) = \mathbb{1}$.
Wenn man jetzt $\mathbf{\Phi_k} := A_k$ wählt, erhält man also

$$\tilde{Q}(z) = B(\bar{z}) + \mathcal{O}(|z|^2).$$

Aus $\tilde{z} = \Phi(z) = z + \mathcal{O}(|z|^2)$ folgt leicht, dass $z = \Phi^{-1}(\tilde{z}) = \tilde{z} + \mathcal{O}(|\tilde{z}|^2)$ gilt.
Setzt man dies für z ein, so erhält man:

$$\tilde{Q}(z(\tilde{z})) = B(\bar{\tilde{z}}) + \mathcal{O}(|\tilde{z}|^2)$$

Insbesondere ist dann $\tilde{Q}_{\tilde{z}}(0) = 0$ und somit folgt die Behauptung. □

Die folgende Proposition zeigt, dass es in den Koordinaten aus Lemma 11 möglich ist, Aussagen über die lokale Normalform i-konvexer Funktionen auf J-konvexe Funktionen zu übertragen.

Proposition 4. *Sei J eine fast-komplexe Struktur auf einer Umgebung U der 0 in $\mathbb{C}^n$, so dass gilt $Q(0) = 0$, $Q_z(0) = 0$. Dann gilt für jede glatte Funktion $\phi : U \to \mathbb{R}$ und alle $t \in T_0\mathbb{C}^n$:*

$$L^J_\phi(0; t) = L^{J_0}_\phi(0; t)$$

Beweis. Nach dem Nijenhuis-Woolf-Theorem existiert zu gegebenem $t \in \mathbb{C}^n \cong T_0\mathbb{C}^n$ eine J-holomorphe Kurve

$$z(\zeta) = t\zeta + d\bar{\zeta} + a\zeta^2 + b\bar{\zeta}^2 + c\zeta\bar{\zeta} + \mathcal{O}(|\zeta|^3)$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}^n$, die insbesondere Lösung von Gleichung (6.1) ist.
Wegen $Q_z(0) = 0$ erhält man für die Taylorentwicklung von Q um 0:

$$Q(z) = B(\bar{z}) + \mathcal{O}(|z|^2),$$

mit B wie in Lemma 11.
Setzt man diese beiden Ausdrücke in Gleichung (6.1) ein, so erhält man:

$$d + 2b\bar{\zeta} + c\zeta + B(\bar{t})t\bar{\zeta} + \mathcal{O}(|\zeta|^2) = 0.$$

Also muss $c = d = 0$ gelten und man hat somit:

$$z(\zeta) = t\zeta + a\zeta^2 + b\bar{\zeta}^2 + \mathcal{O}(|\zeta|^2).$$

In Analogie zu Gleichung (4.1) erhält man die Taylorentwicklung von ϕ um 0 durch:

$$\begin{aligned}\phi(z_1,\cdots,z_n) = \phi(0) + 2Re\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\phi}{\partial z_i}(0)z_i\right) + \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z_i\partial\bar{z}_j}(0)z_i\bar{z}_j\right)\\ + Re\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\phi}{\partial z_i\partial z_j}(0)z_iz_j\right) + \mathcal{O}(|z|^3).\end{aligned}$$

Wodurch sich für $(\phi\circ z)(\zeta)$ folgendes ergibt:

$$\begin{aligned}\phi(\zeta) = \phi(0) + Re\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\phi}{\partial z_i}(0)(t_i\zeta + a_i\zeta^2 + b_i\bar{\zeta}^2)\right) + \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\phi}{\partial z_i\partial\bar{z}_j}(0)t_i\bar{t_j}\zeta\bar{\zeta}\\ + Re\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\phi}{\partial z_i\partial z_j}(0)t_it_j\zeta^2\right) + \mathcal{O}(|\zeta|^3)\end{aligned}$$

Nun sind aber offensichtlich die Terme

$$Re\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\phi}{\partial z_i}(t_i\zeta + a_i\zeta^2 + b_i\bar{\zeta}^2)\right),$$

$$Re\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\phi}{\partial z_i\partial z_j}(0)t_it_j\zeta^2\right)$$

Realteile holomorpher Funktionen in ζ und somit harmonisch. Weiter gilt nach Lemma 5: $L_\phi^{J_0}(0;t) = 4\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\phi}{\partial z_i\partial\bar{z}_j}(0)t_i\bar{t_j}$, $L_{\phi\circ z}^{i}(0;z) = 4\frac{\partial(\phi\circ z)}{\partial\zeta\partial\bar{\zeta}}(0)z\bar{z}$. Dies ergibt zusammen mit Lemma 9 und Gleichung (3.1):

$$\begin{aligned}L_\phi^J(0;t) &= L_\phi^J(0;\frac{\partial z}{\partial\zeta})\\ &= L_\phi^J(0;z_*(0)\frac{\partial}{\partial\zeta})\\ &= L_\phi^i(0;\frac{\partial}{\partial\zeta})\\ &= 4\frac{\partial(\phi\circ z)}{\partial\zeta\partial\bar{\zeta}}(0)\\ &= 4\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\phi}{\partial z_i\partial\bar{z}_j}(0)t_i\bar{t_j}\\ &= L_\phi^{J_0}(0;t)\end{aligned}$$

Man beachte, dass in der Rechnung die in Lemma 9 eingeführte Definition der Levi-Form auf $T^{(1,0)}\mathbb{C}^n$ verwendet wurde. $\square$

7. Lokale Normalform für J-konvexe Funktionen

Lemma 11 und Proposition 4 zeigen, dass man für eine gegebene fast-komplexe Struktur J auf $\mathbb{C}^n$ Koordinaten in einer Umgebung der 0 erhält, so dass in diesen Koordinaten $L^J_\phi(0,t) = L^{J_0}_\phi(0,t)$ für alle auf einer Umgebung der 0 definierten glatten reellwertigen Funktionen $\phi : U \to \mathbb{R}$. Insbesondere ist also in diesen Koordinaten J-Konvexität in 0 äquivalent zu i-Konvexität in 0. Diese Eigenschaft ist invariant unter komplex-linearen Koordinatentransformationen, wie das folgende Lemma zeigt:

Lemma 12. *Sei J eine fast-komplexe Struktur auf einer kleinen Umgebung U der 0 in $\mathbb{C}^n$, so dass gilt $Q(0) = 0$, $Q_z(0) = 0$. Sei weiter $\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ eine $\mathbb{R}$-lineare Koordinatentransformation und $\tilde{z} := \Phi(z)$. Dann gilt:*
Die fast-komplexe Struktur $\tilde{J} := \tilde{z}^*(J)$ in den Koordinaten $\tilde{z}$ erfüllt $\tilde{Q}(0) = 0$, $\tilde{Q}_{\tilde{z}}(0) = 0$ genau dann, wenn Φ komplex-linear ist, das heißt $\Phi(z) = Az$ für ein $A \in GL(n;\mathbb{C})$.

Beweis. Nach Definition von Q gilt $Q(0) = 0$ genau dann, wenn $J(0) = J_0$. Per Definition ist J_0 die von i induzierte fast-komplexe Struktur auf $\mathbb{C}^n$. Das heißt aber, dass $\tilde{J}(0) = J_0$ genau dann, wenn Φ komplex-linear ist. Also gilt $\tilde{Q}(0) = 0$ genau dann, wenn Φ komplex-linear ist. Es bleibt zu zeigen, dass in diesem Fall auch gilt $\tilde{Q}_{\tilde{z}}(0) = 0$:
Der Beweis von Lemma 11 zeigt, dass

$$\tilde{Q}(z) = (\Phi_z Q - \Phi_{\bar{z}})(\bar{\Phi}_{\bar{z}} - \bar{\Phi}_z Q)^{-1} = AQ(z)\bar{A}^{-1}$$

Nun ist aber $z = A^{-1}\tilde{z}$ und es folgt somit, wegen $Q(z) = B(\bar{z}) + \mathcal{O}(|z|^2)$:

$$\tilde{Q}(\tilde{z}) = AB(\bar{A}^{-1}\bar{\tilde{z}})\bar{A}^{-1} + \mathcal{O}(|\tilde{z}|^2)$$

Hieraus folgt sofort die Behauptung. □

Das heißt aber, dass sich die Aussagen über die lokale Normalform i-konvexer Funktionen aus Kapitel 4 wie folgt auf Aussagen über die lokale Normalform J-konvexer Funktionen verallgemeinern lassen:

Satz 7. *Sei (V,J) eine fast-komplexe Mannigfaltigkeit und $\phi : V \to \mathbb{R}$ eine J-konvexe Funktion, die in $p \in V$ einen kritischen Punkt hat. Dann existieren Koordinaten $z = (z_1, \cdots, z_n)$ in einer Umgebung von p mit $z(p) = 0$, so dass für J bezüglich dieser Koordinaten gilt*

$$Q(0) = 0, \quad Q_z(0) = 0$$

und ϕ bezüglich dieser Koordinaten die Form

$$\phi(z) = \phi(p) + |z|^2 + Re(z^t D z) + \mathcal{O}(|z|^3)$$

annimmt, mit $D = diag(d_1, \cdots, d_n)$ und $0 \le d_1 \le \cdots \le d_n$.

Beweis. Wähle beliebige lokale Koordinaten u um p mit $u(p) = 0$. Die fast-komplexe Struktur ist bezüglich dieser Koordinaten gegeben durch $u^*(J)$. Nach Lemma 11 existiert eine Koordinatentransformation $v := \Phi(u)$ mit $v(0) = 0$, so dass bezüglich der Koordinaten v die zur fast-komplexen Struktur $J' := v^*(u^*(J))$ gehörende Matrix Q' die Bedingungen $Q'(0) = 0$, $Q'_v(0) = 0$ erfüllt. Nach Proposition 4 ist dann ϕ i-konvex in 0 und, da ϕ glatt ist, auch in einer Umgebung der 0.

Das heißt man findet nach Satz 5 eine komplex-lineare Koordinatentransformation $z = Av$, so dass gilt:

$$\phi(z) = \phi(p) + |z|^2 + Re(z^t Dz) + \mathcal{O}(|z|^3),$$

mit $D = diag(d_1, \cdots, d_n)$ und $0 \leq d_1 \leq \cdots \leq d_n$.
Da aber die Koordinatentransformation $z = Av$ komplex-linear ist, gilt nach Lemma 12 für die fast-komplexe Struktur $J'' := z^*(J')$ ebenfalls $Q''(0) = 0$ und $Q''_z(0) = 0$ und da durch z nach Konstruktion lokale Koordinaten um p gegeben sind folgt die Behauptung. □

Wegen Lemma 12 verallgemeinern sich auch die Eindeutigkeitsaussagen für die Normalform der Terme zweiter Ordnung direkt:

Korollar 5. *Sei (V, J) eine fast-komplexe Mannigfaltigkeit und $\phi : V \to \mathbb{R}$ J-konvex mit kritischem Punkt in p. Dann gibt es genau eine Matrix $D = diag(d_1, \cdots, d_n)$ mit den Eigenschaften $0 \leq d_1 \leq \cdots \leq d_n$ und $\phi(z) = |z|^2 + Re(z^t Dz) + \mathcal{O}(|z|^3)$ in geeigneten Koordinaten.*

Beweis. Der Beweis verläuft vollkommen analog zum Beweis von Korollar 3. □

Korollar 6. *Sei J eine fast-komplexe Struktur auf einer Umgebung U der 0 in $\mathbb{C}^n$ mit $Q(0) = 0$ und $Q_z(0) = 0$ und sei $\phi : U \to \mathbb{R}$ J-konvex mit $\phi(z) = |z|^2 + Re(z^t Dz) + \mathcal{O}(|z|^3)$, wobei $D = diag(d_1, \cdots, d_n)$, $0 < d_1 < \cdots < d_n$. Dann gilt:*
Ist f eine Koordinatentransformationen in einer Umgebung der 0, die $Q(0) = 0$, $Q_z(0) = 0$ und die Terme zweiter Ordnung von ϕ erhält, so ist f von der Form

$$f(z) = (\pm z_1, \cdots, \pm z_n) + \mathcal{O}(|z|^3).$$

Beweis. Wegen Lemma 12 ist f von der Form:

$$f(z) = Az + \mathcal{O}(|z|^2),$$

für ein $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und man erhält die Aussage vollkommen analog zum Beweis von Korollar 4. □

Es sei erwähnt, dass man analog auch Bemerkung 7 verallgemeinern kann. Schließlich sollen noch die Terme höherer Ordnung betrachtet werden. Man stellt fest, dass alle Terme der Ordnung größer gleich 5 wegtransformiert werden können:

Satz 8. *Sei $\phi : V \to \mathbb{R}$ eine J-konvexe Funktion, die in $p \in V$ einen nicht-degenerierten kritischen Punkt hat. Dann existieren Koordinaten $z = (z_1, \cdots, z_n)$ in einer Umgebung von p mit $z(p) = 0$, so dass für J bezüglich dieser Koordinaten gilt:*

$$Q(0) = 0, Q_z(0) = 0$$

und ϕ bezüglich dieser Koordinaten die Form

$$\phi(z) = \phi(p) + |z|^2 + Re(z^t Dz) + r(z)$$

annimmt, wobei $D = diag(d_1, \cdots, d_n)$ und $0 \leq d_1 \leq \cdots \leq d_n$ und r ein Polynom in den z_i ist, welches nur aus Termen dritter und vierter Ordnung besteht.

Beweis. Anwenden des Morse-Lemmas liefert Koordinaten $u = (u_1 = x_1 + iy_1, \cdots, u_n = x_n + iy_n)$, in denen ϕ die Form

$$\phi(u) = \phi(p) \pm x_1^2 \pm \cdots \pm x_n^2 \pm y_1^2 \pm \cdots \pm y_n^2$$

hat. Jetzt bringt man wie im Beweis von Satz 7 zunächst J und dann ϕ auf Normalform. Beachtet man, dass die Transformation in Lemma 11, mit der man J auf Normalfrom bringt, quadratisch gewählt werden kann und die Transformation aus Satz 5, mit der man anschließend ϕ auf Normalform bringt, komplex-linear ist, so folgt die Behauptung, da man insgesamt eine Transformation zweiter Ordnung benötigt, um sowohl J, als auch ϕ auf Normalform zu bringen. □

Bemerkung 8. Die Menge der Koordinatentransformationen, die die Normalform für J invariant lassen ist deutlich größer als die Menge der holomorphen Funktionen, da man ausgehend von beliebigen Koordinaten um einen kritischen Punkt allein durch Anwenden einer Transformation zweiter Ordnung sowohl J, als auch ϕ auf Normalform bringen kann.

Literatur

[1] S.Kobayashi und K.Nomizu, *Foundations of Differential Geometry, Volume 2*, 1 edition, Wiley-Interscience (1996).

[2] Theodor Bröcker, *Lineare Algebra und analytische Geometrie*, Birkhäuser; Auflage 2, korr A. (2004).

[3] Robert C.Thompson, *Singular values and Diagonal Elements of Complex Symmetric Matrices*, Linear Algebra and its Applications **26**, 65-106 (1979).

[4] A.Newlander und L.Nirenberg, Complex analytic coordinates in almost complex manifolds, Annals of Mathematics (2) **65**, 391-404 (1957).

[5] H.Kim und K.-H. Lee *Complete prolongation for infinitesimal automorphisms on almost complex manifolds.*, Mathematische Zeitschrift **264**, (2010), no.4, 913-925.

[6] G.W.Stewart, *Matrix Algorithms Volume1: Basic Decompositions*, Society for Industrial and Applied Mathematics (1998).

[7] J.Milnor, *Morse theory*, Based on lecture notes by M.Spivak and R.Wells, Annals of Mathematics Studies **51**, Princeton University Press, Princeton (1963).

[8] K.Diederich und A.Sukhov, *Plurisubharmonic exhaustion functions and almost complex Stein structures*, Preprint, ArXiv math/0603417v1. Wird vorraussichtlich erscheinen im Michigan Mathematical Journal.

[9] A. Nijenhuis und W. Wolf, *Some integration problem in almost complex manifolds*, Annals of Mathematics (2) **77**, 424-489, (1963).

[10] J. Rosay, *Notes on the Diederich-Sukhov-Tumanov Normalization for almost complex structures*, Collect. Math. **60**, (2009), no.1, 43-62.

[11] C. Voisin, *Hodge theory and Complex Algebraic Geometry II*, Cambridge Studies in Advanced mathematics, Cambridge University Press, Auflage 1, (2007)

[12] F.R. Harvey, R.O. Wells, Jr., *Zero sets of non-negative strictly plurisubharmonic functions*, Math. Ann. **201**, 165 - 170, (1973)

[13] M. Grueneberg, *On the integrability of the natural almost complex structure on the tangent bundle of a Riemannian manifold*, zu finden auf: http://www.mathematik.uni-muenchen.de/ kai/classes/257win01/projects.html

[14] K.Cieliebak und Y.Eliashberg, *From Stein to Weinstein and Back*, Buch in Vorbereitung, siehe http://www.mathematik.uni-muenchen.de/ kai/research/stein.pdf

Selbstständigkeitserklärung

Ich versichere, die Arbeit selbstständig angefertigt und dazu nur die im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen benutzt zu haben.

München, den 08. August 2011