Lösung zu 4.1: a) Die Funktion ist differenzierbar in $x_0 = 0$; denn der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert und es gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|x-0}{x} = \lim_{x\to 0} |x| = 0.$$

b) Wir berechnen für $x > 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \quad = \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} \ .
\end{aligned}$$

Also existiert der Grenzwert und wir erhalten die Ableitung $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

c) Da $f = \operatorname{arccot}$ die Umkehrfunktion zum Kotangens, $g(x) = \cot x$ auf dem Intervall $(0, \pi/2)$ ist, errechnen wir zunächst mit der Quotientenregel

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{-\sin x \,\sin x - \cos x \,\cos x}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x) \ .$$

Nun ergibt sich die Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{-1}{1+\cot^2(\operatorname{arccot} x)} = \frac{-1}{1+x^2}.$$