Lösung zu 4.5: Für $x \neq 1$ können wir auf beiden Seiten der Identität die Ableitung berechnen und erhalten

$$(n-1)x^{n-2} + \cdots + 2x + 1 = \frac{nx^{n-1}(x-1) - (x^n - 1)}{(x-1)^2} = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(x-1)^2}.$$

Multiplizieren wir nun diese Identität mit x und differenzieren wiederum, so ergibt sich auch ein Ausdruck für die zweite Summe. Es gilt

$$\begin{aligned}
(n-1)^2 x^{n-2} + \ldots + 4x + 1 \;&=\; \frac{d}{dx}\big((n-1)x^{n-1} + \cdots + 2x^2 + x\big) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{(n-1)x^{n+1} - nx^n + x}{(x-1)^2}\right) \\
&= \frac{((n+1)(n-1)x^n - n^2x^{n-1} + 1)(x-1)^2 - 2((n-1)x^{n+1} - nx^n + x)(x-1)}{(x-1)^4} \\
&= \frac{(n+1)(n-1)x^n - n^2x^{n-1} + 1}{(x-1)^2} - 2\frac{(n-1)x^{n+1} - nx^n + x}{(x-1)^3}\ .
\end{aligned}$$