Lösung zu 5.2: Für das erste Integral wählen wir $f(x) = x$ und $g'(x) = e^{2x}$, denn es ist $f'(x) = 1$ und die Stammfunktion zu g' ergibt sich durch den Ausdruck $g(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$. Also folgt mit partieller Integration

$$\int_0^1 x\, e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} x e^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int 1 \cdot e^{2x}\, dx$$

Da wir die Stammfunktion zum Interganden auf der rechten Seite bereits kennen, ergibt sich

$$\int_0^1 x\, e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}e^2 - 0 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}\,.$$

Nun betrachten wir noch das zweite Integral. Wir setzen $f(x) = \ln x$ und $g'(x) = \ln x$. Aus den Beispielen des Texts lesen wir ab $f'(x) = \frac{1}{x}$ und eine Stammfunktion zu g' ist gegeben durch $g(x) = x(\ln x - 1)$. Nun versuchen wir partielle Integration und bekommen

$$\int_{1/2}^1 (\ln(x))^2\, dx = x(\ln x - 1)\ln x\Big|_{1/2}^1 - \int_{1/2}^1 \frac{1}{x} x(\ln x - 1)\, dx\,.$$

Das Integral auf der rechten Seite können wir bestimmen, da wir eine Stammfunktion zum Logarithmus kennen. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_{1/2}^1 (\ln(x))^2\, dx &= x(\ln x - 1)\ln x\Big|_{1/2}^1 - \left(x(\ln x - 1)|_{1/2}^1 - x|_{1/2}^1\right) \\
&= 0 - \frac{1}{2}(\ln(\frac{1}{2}) - 1)\ln(\frac{1}{2}) + 1 + \frac{1}{2}(\ln(\frac{1}{2}) - 1) + 1 - \frac{1}{2} \\
&= -\frac{1}{2}(\ln(2))^2 - \ln(2) + 1\,.
\end{aligned}$$