Lösung zu 5.4: Wir substituieren $u = e^x$ mit $du = u'(x)dx = e^x\,dx$. Also folgt

$$\int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{1}{u + \frac{1}{u}}\,du = \int \frac{u}{u^2+1}\,du\,.$$

Nun sehen wir, dass sich eine weitere Substitution anbietet, nämlich $v = u^2$ mit $dv = 2u\,du$. Damit ergibt sich

$$\int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{v+1}\,dv = \frac{1}{2}\ln|v+1| + c,$$

wenn wir die Stammfunktion $\ln|v+1|$ zum Ausdruck $\frac{1}{v+1}$ nutzen. Machen wir noch die Substitutionen rückgängig, so ergeben sich die Stammfuntkionen

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right) + c$$

mit Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

Betrachten wir das zweite Beispiel. Wir führen zunächst eine partielle Integration aus, indem wir $\tilde{f}(x) = (\ln(x))^2$ und $\tilde{g}'(x) = \frac{1}{x^2}$ setzen. Mit der Kettenregel folgt $\tilde{f}'(x) = 2\frac{\ln x}{x}$ und eine Stammfunktion zu $\tilde{g}'$ ist $\tilde{g}(x) = -\frac{1}{x}$. Also erhalten wir

$$\int \frac{\ln(x^2)}{x^2}\,dx = -\frac{(\ln(x))^2}{x} + 2\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

für das unbestimmte Integral. Hier sehen Sie, dass unsere Wahl sich anbietet: durch das Integrieren von g' reduzieren wir den Betrag der Potenz in g', genauso wird die Potenz des Loagrithmus reduziert beim Differenzieren von f.

Aus demselben Grund führen wir noch eine weiter partielle Integration beim rechten Integral aus und es folgt

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln(x^2)}{x^2}\,dx &= -\frac{(\ln(x))^2}{x} - 2\frac{\ln x}{x} + 2\int \frac{1}{x^2}\,dx \\ &= -\frac{(\ln(x))^2}{x} - 2\frac{\ln x}{x} - 2\frac{1}{x}\end{aligned}$$

für $k \in \mathbb{R}$. Somit sind

$$G(x) = -\frac{1}{x}\left((\ln(x))^2 + 2\ln x + 2\right) + k\,,$$

$k \in \mathbb{R}$, die gesuchten Stammfunktionen.