Lösung zu 6.3: Um das Gleichungssystem zu lösen, subtrahieren wir zunächst die erste Zeile von der dritten. Dies führt auf die äquivalenten drei Gleichungen

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & az & = & 1 \\ & & 2y & + & az & = & a \\ & & 2(a-1)y & + & (1-a)z & = & 2\ . \end{array}$$

Da x nur noch in der ersten Gleichung vorkommt, haben wir x "eliminiert" und es genügt mit den unteren beiden Zeilen fortzufahren. Es bietet sich an, die dritte Zeile zu ersetzen, indem wir $a-1$-mal die zweite von der dritten abziehen. Nun ergibt sich

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & az & = & 1 \\ & & 2y & + & az & = & a \\ & & & & (1-a^2)z & = & 2-a(a-1)\ . \end{array}$$

Wenn wir eine solche Gestalt des Gleichungssystems erreicht haben (Stufenform), lassen sich die Lösungsvarianten ablesen. Wir müssen drei Fälle unterscheiden.

1. Fall, $a = 1$. In diesem Fall lautet die letzte Zeile $0z = 2$. Es gibt aber kein $z \in \mathbb{R}$, das diese Gleichung erfüllen könnte. Also hat in diesem Fall das Gleichungssystem keine Lösung.

2. Fall, $a = -1$. Nun lautet die letzte Gleichung $0z = 0$. Dies ist für alle $z \in \mathbb{R}$ erfüllt. Aus den anderen Gleichungen erhalten wir $y = \frac{1}{2}(-1+z)$ und $x = 2$. Also gibt es unendlich viele Lösungen.

3. Fall, $a \neq \pm 1$. In diesem Fall ist $1 - a^2 \neq 0$ und wir können durch diesen Faktor dividieren. Dann erhalten wir aus der letzten Zeile $z = \frac{2-a(a-1)}{1-a^2}$. Setzen wir diesen Wert für z in der zweiten Zeile ein, so folgt $y = \frac{a}{2(a-1)}$. Nun können wir sowohl z als auch y in die erste Gleichung einsetzen und es folgt $x = 1 - a$. Insgesamt sehen wir, dass es in diesem Fall stets genau eine Lösung des Gleichungssytems gibt.