Lösung zu 6.4: Zunächst bestimmen wir einen Vektor b, der auf E_2 senkrecht steht. Für diesen gelten die Bedingungen

$$b \cdot \begin{pmatrix} -1-1 \\ -2-2 \\ 2+1 \end{pmatrix} = b \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad b \cdot \begin{pmatrix} 2-1 \\ -3-2 \\ 1+1 \end{pmatrix} = b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = 0\ .$$

Also ist eine Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcl} -2b_1 & - & 4b_2 & + & 3b_3 & = & 0 \\ b_1 & - & 5b_2 & + & 2b_3 & = & 0 \end{array}$$

gesucht. Addieren wir das Doppelte der zweiten Gleichung zur ersten, so folgt $-14b_2 + 7b_3 = 0$ bzw. $b_3 = 2b_2$. Setzen wir b_3 in die erste Gleichung ein ergibt sich weiter $b_1 = 5b_2 - 2b_3 = b_2$. Nun wählen wir etwa $b_2 = 1$ und erhalten, dass der Vektor $b = (1,1,2)^\top$ senkrecht zur zweiten Ebene steht. Den gesuchten Winkel φ erhalten wir nun aus dem Skalarprodukt der beiden jeweils auf den Ebenen senkrecht stehenden Vektoren $a = (6,-7,2)^\top$ und $b = (1,1,2)^\top$,

$$\cos\varphi = \frac{a \cdot b}{\|a\|\,\|b\|}.$$

Wir berechnen $a \cdot b = 3$, $\|a\| = \sqrt{89}$ und $\|b\| = \sqrt{6}$. Also ist $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{6 \cdot 89}}$. Mit dem Taschenrechner erhalten wir $\varphi \approx 0.144 \approx 82.5°$.